T S1 DS n° 4 : Probabilités - Suites – Complexes - Correction 2018

Ex 1 : *Fonctions numériques* - (**) - 6 pts

Soit f la fonction définie par $f(x)=x+1-\dfrac{2}{x^2+1}$ avec $x\in\mathbb{R}$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On pose $g(x)=x^3-x^2+3x+1$ avec $x\in\mathbb{R}$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=3x^2-2x+3$

le discriminant du trinôme $3x^2-2x+3$ est négatif donc $g'(x)$ est du signe de son facteur dominant ; donc $\forall x\in\mathbb{R} : g'(x)>0$

ainsi g est strict croissante sur $\mathbb{R}$

$g(x)=x^3\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

donc (par produit) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$; de même $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Ainsi g est continue, monotone et de signe alternée sur $[-1;0]$ ($g(-1)<0$ et $g(0)>0$) donc d'après le th des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique $\alpha\in[-1;0]$

on applique la méthode des « tableaux successifs » :

$g(-1)<0<g(0)$ donc $-1<\alpha<0$

$g(-0{,}3)<0<g(-0{,}2)$ donc $-0{,}3<\alpha<-0{,}2$

$g(-0{,}30)<0<g(-0{,}29)$ donc $-0{,}30<\alpha<-0{,}29$

$g(-0{,}296)<0<g(-0{,}295)$ donc $-0{,}296<\alpha<-0{,}295$

ainsi on déduit que g est négative sur $]-\infty;\alpha[$, nulle en $x=\alpha$ et positive sur $]\alpha;+\infty[$

Partie B : Étude de la fonction principale

$x^2+1\neq 0$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x)=x+1-\dfrac{2}{x^2+1}$ donc on déduit que :

$$f'(x)=1-\frac{-2(2x)}{(x^2+1)^2}=1+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

par ailleurs,

$$(x+1)g(x)=(x+1)(x^3-x^2+3x+1)=x^4-x^3+3x^2+x+x^3-x^2+3x+1$$

donc $(x+1)g(x)=x^4+2x^2+4x+1$

donc la dérivée de f vérifie : $f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$

En utilisant la ***Partie A*** on obtient le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)=x+1-\dfrac{2}{x^2+1}$ Donc f(x)-(x+1)={-2} over {x^2+1}

or $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(x+1))=0$

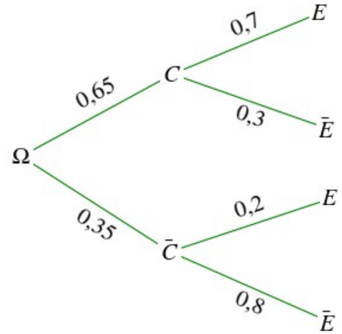
Donc C_f admet une asymptote oblique (d) d'équation réduite $y=x+1$

Ex 2 : *Probabilités conditionnelles* - (*) - 5 pts

On note les événements suivants :

- C : « La personne est favorable à la construction du barrage »
- E : « La personne est écologiste »

arbre pondéré de la situation --------->



$P(C\cap E)=P(C)\times P_C(E)=0{,}65\times 0{,}7=0{,}455$

la probabilité qu'une personne interrogée soit opposée au barrage et soit écologiste est de 45,5 %

D'après la formule des probabilités totales $P(E)=P(C\cap E)+P(\overline{C}\cap E)$

donc $P(E)=P(C)\times P_C(E)+P(\overline{C})\times P_{\overline{C}}(E)$

soit $P(E)=0{,}65\times 0{,}7+0{,}35\times 0{,}2=0{,}525$

la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste est de 52,5 %

On interroge une personne écologiste ; la probabilité qu'elle soit opposée au barrage est alors $P_E(C)=\frac{P(E\cap C)}{P(E)}=\frac{0{,}455}{0{,}525}=\frac{13}{15}\simeq 0{,}866$

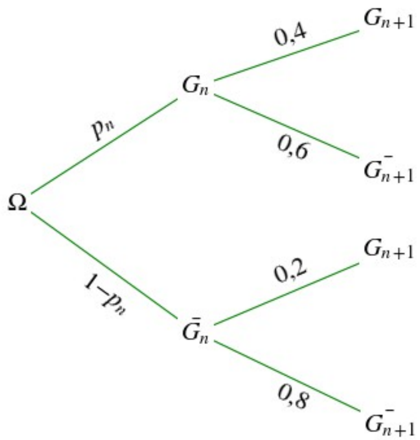
donc la probabilité qu'une personne soit opposée au barrage sachant qu'elle est écologiste est de 86,6 %

Ex 3 : ***Probabilités & Suites arithmético-géométriques*** **- (**) - 6 pts**

On utilise les notations suivantes :

- G_n : « L'internaute gagne la $n^{\text{ème}}$ partie »
- p_n : « Probabilité que l'internaute gagne la $n^{\text{ème}}$ partie »

arbre pondéré en ***annexe*** -------------------->



Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*: p_{n+1}=0{,}2\,p_n+0{,}2$

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=P(G_{n+1})\\&=P(G_n\cap G_{n+1})+P(\overline{G_n}\cap G_{n+1})\\&=p_n\times 0{,}4+(1-p_n)\times 0{,}2\\&=0{,}2\,p_n+0{,}2\end{aligned}$$

Pour tout entier $n\geqslant 1$ on pose : $u_n=p_n-0{,}25$ avec $p_1=1$

donc $$\begin{aligned}u_{n+1}&=p_{n+1}-0{,}25\\&=0{,}2\,p_n+0{,}2-0{,}25\\&=0{,}2\,p_n-0{,}05\\&=0{,}2(p_n-0{,}25)\\&=0{,}2u_n\end{aligned}$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}2$ et de 1er terme $u_1=p_1-0{,}25=0{,}75$

ainsi, pour tout entier $n\geqslant 1$: $u_n=u_1\times q^{n-1}=0{,}75(0{,}2)^{n-1}$

or $p_n=u_n+0{,}25$ donc pour tout entier $n\geqslant 1$: $p_n=0{,}75(0{,}2)^{n-1}+0{,}25$

on obtient que : $p_{n+1}-p_n=(0{,}75(0{,}2)^n+0{,}25)-(0{,}75(0{,}2)^{n-1}+0{,}25)$

donc $p_{n+1}-p_n=0{,}75(0{,}2)^n-0{,}75(0{,}2)^{n-1}$

donc $p_{n+1}-p_n=0{,}75((0{,}2)^n-(0{,}2)^{n-1})$

donc $p_{n+1}-p_n=0{,}75(0{,}2)^{n-1}(0{,}2-1)$

donc $p_{n+1}-p_n=-0{,}6(0{,}2)^{n-1}$

ainsi pour tout entier $n\geqslant 1$: $p_{n+1}-p_n<0$

donc la suite (p_n) est décroissante

par ailleurs, pour tout entier $n\geqslant 1$: $0<p_n<1$ (propriété des probabilités)

donc la suite (p_n) est minorée par 0

d'après le th de convergence des suites monotones on déduit que la suite (p_n) est convergente vers une limite L

enfin, on sait que $0<q<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}2)^{n-1}=0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}75(0{,}2)^{n-1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n)=0{,}25$

par conséquent, cela signifie qu'au fur et à mesure des parties jouées, la probabilité de gagner va s'approcher de 25 %

Ex 4 : ***Lois Binomiales*** **- (*) - 3 pts**

Pour les questions suivantes, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p : $B(n\,,p)$. <u>*Aucune justification n'est demandée*</u>

1) $n=6$ et $p=0{,}4$. Donner la loi de probabilité de X

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	0,0460	0,1860	0,3410	0,2760	0,1380	0,0370	0,0004

2) $n=10$ et $E(X)=3$ donc $n\,p=3$ donc $p=0{,}3$
   avec une calculatrice on obtient que :
   $P(X\leqslant 3)\simeq 0{,}6496$ et $P(X\geqslant 7)\simeq 0{,}01059$

3) $p=0{,}2$ et $\sigma(X)=2$ donc $\sqrt{n\,p(1-p)}=2$ donc $n=25$
   avec une calculatrice on obtient que :
   $P(X\leqslant 2)\simeq 0{,}098$ et $P(X>2)\simeq 0{,}902$