Ex 1 : $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=(-2x)e^{-x}+(1-x^2)(-e^{-x})=e^{-x}(x^2-2x-1)$

$f'(x)=0$ si $x^2-2x-1=0$ ($e^{-x}\neq 0$) donc $x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$

$f'(x)>0$ si $x^2-2x-1>0$ ($e^{-x}>0$) donc $x<1-\sqrt{2}$ ou $x>1+\sqrt{2}$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	0

$f(1-\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}-1}$ et $f(1+\sqrt{2})=(-2\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x^2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-x})=+\infty$ donc (produit) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$f(x)=e^{-x}-x^2.e^{-x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x})=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{-x})=0$

donc (par somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; Ainsi, la courbe C_f admet une asymptote d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

Équation de la tangente (Δ) à C_f au point d'abscisse 0 :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=-1$ et $f(0)=0$ donc $(\Delta): y=-x+1$

BONUS : Étude de la position relative de C_f et (Δ)

$f(x)-(-x+1)=(1-x^2)e^{-x}-(1-x)=(1-x)(1+x)e^{-x}-(1-x)$

$=(1-x)[(1+x)e^{-x}-1]$

on pose $g(x)=(1+x)e^{-x}-1$ avec $x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=e^{-x}+(1+x)(-e^{-x})=e^{-x}(-x)$

g' s'annule en $x=0$; g' est positive si $x<0$ et g' est négative si $x>0$ donc g est croissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

ainsi g admet un maximum local en $x=0$ avec $g(0)=0$

donc $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)\leqslant 0$

on en déduit le tableau de signes ci-dessous :

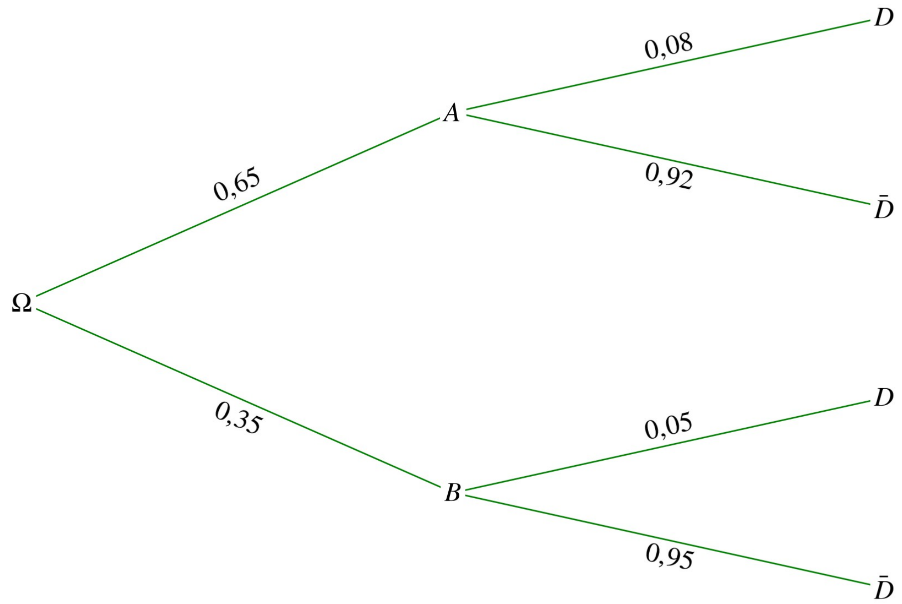
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$-$		$-$	
$f(x)-(1-x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi la courbe C_f se situe en-dessous de (Δ) pour $x<1$

La courbe C_f se situe au-dessus de (Δ) Pour $x>1$

et la courbe C_f coupe (Δ) en $x=0$ et $x=1$

Ex 2 : On a l'arbre pondéré ci-contre

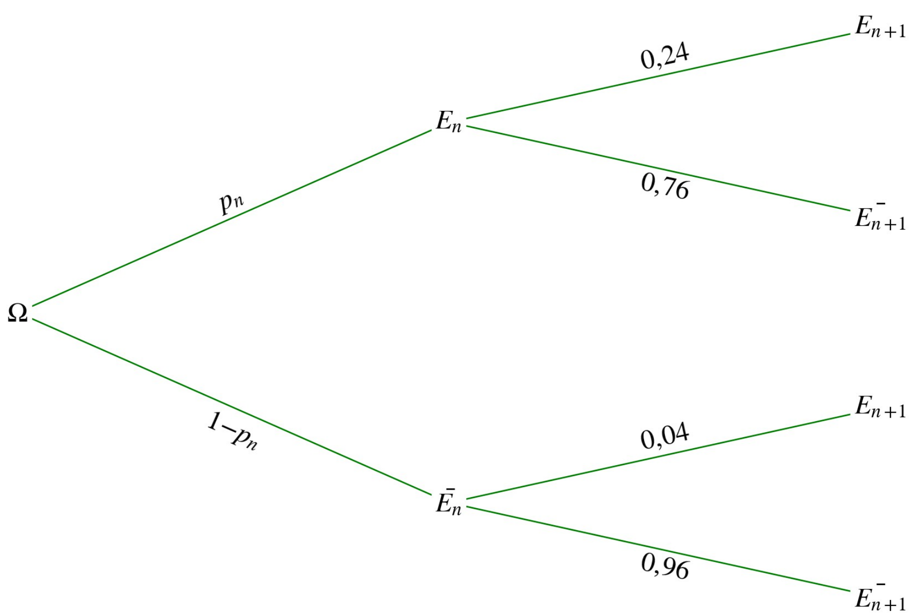


$P(\overline{D}\cap B)=P(B)\times P_B(\overline{D})=0{,}35\times0{,}95=0{,}3325$

$P(\overline{D})=P(A\cap\overline{D})+P(B\cap\overline{D})=0{,}65\times0{,}92+0{,}3325=0{,}9305$

$P_{\overline{D}}=\dfrac{P(A\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{0{,}65\times0{,}92}{0{,}9305}\simeq0{,}6476$

Ex 4 : On a l'arbre pondéré ci-contre



$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(E_{n+1}) = P(E_n \cap E_{n+1}) + P(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) \\ &= P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= 0{,}24\, p_n + 0{,}04(1 - p_n) = 0{,}2\, p_n + 0{,}04 \quad \text{pour tout entier} \quad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05 = 0{,}2\, p_n + 0{,}04 - 0{,}05 = 0{,}2\, p_n - 0{,}01 = 0{,}2(p_n - 0{,}05) = 0{,}2 u_n$
pour tout entier $n \geqslant 0$
donc la suite (u_n) est géométrique de 1er terme $u_1 = -0{,}05$ et de raison $q = 0{,}2$ donc $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0{,}05 \times (0{,}2)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$

ainsi $\forall n \geqslant 1 : p_n = 0{,}05 - 0{,}05 \times (0{,}2)^{n-1}$

On admet que la suite (p_n) est croissante

Montrons par récurrence que la suite (p_n) est majorée par 1
on pose la relation $P_n : \forall n \geqslant 1, 0 \leqslant p_n < 1$

Initialisation : $p_1 = 0$ donc $0 \leqslant p_0 < 1$ donc P1 est vraie

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang n tel que P_n soit vraie

donc $0 \leqslant p_n < 1$ donc $0 \leqslant 0{,}2\, p_n < 0{,}2$
donc $0 < 0{,}04 \leqslant 0{,}2\, p_n + 0{,}04 < 0{,}24 < 1$ donc $0 < p_{n+1} < 1$
donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : la suite (p_n) est majorée par 1 (et minorée par 0)

Ainsi, la suite (p_n) est croissante et majorée donc elle est convergente d'après le théorème de convergence monotone

Par ailleurs, si 0<q<1 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$ ici $q = 0{,}2$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}2^{n-1}) = 0$ donc on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (p_n) = 0{,}05 - 0{,}05 \times 0 = 0{,}05$

Ex 3 : $f(x) = (a x^2 + b x + c) e^{-x}$ avec $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = (2ax + b - ax^2 - bx - c) e^{-x} = (-a x^2 + (2a - b)x + (b - c)) e^{-x}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2ax + 2a - b + a x^2 - (2a - b)x - (b - c)) e^{-x} \\ &= (a x^2 + (b - 4a) + (2a - 2b + c)) e^{-x} \end{aligned}$$

d'après l'énoncé on obtient :

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \\ f''(0) = -1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} c = 1 \\ b - c = 2 \\ 2a - 2b + c = -1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

donc $f(x) = (2x^2 + 3x + 1) e^{-x}$ et $f'(x) = (-2x^2 + x + 2) e^{-x}$

$f'(x) = 0$ si $x = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{4}$ ou $x = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{4}$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	0