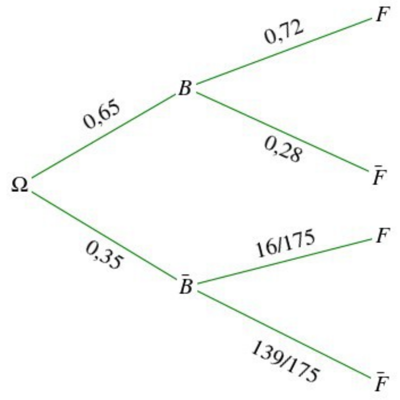
Ex 1 : (5 pts)

1) *arbre pondéré* de la situation



2) $P(B\cap F)+P(\bar{B}\cap F)=P(B)$

donc $P(\bar{B}\cap F)=P(B)-P(B\cap F)$

$=P(B)-P(B)\times P_B(F)$

$=0,54-0,65\times 0,72=0,072$

3) $P_F(\bar{B})=\dfrac{P(\bar{B}\cap F)}{p(F)}=\dfrac{0,072}{0,54}=\dfrac{2}{15}$

de la même façon on obtient

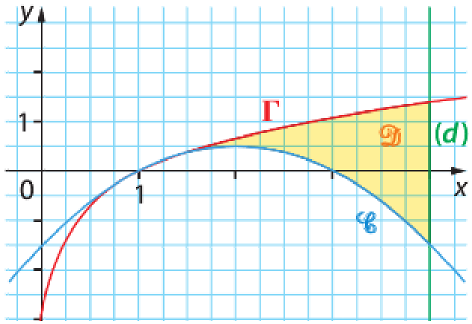
4) $P_{\bar{B}}(F)=\dfrac{P(\bar{B}\cap F)}{p(\bar{B})}=\dfrac{0,072}{0,35}=\dfrac{36}{175}$

Ex 2 : **(7 pts)**

On considère les fonctions f et g définies sur $[1;+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{-1}{2}x^2+2x-\dfrac{3}{2}$ de courbe $\mathscr{C}$

et $g(x)=\ln(x)$ de courbe Γ



Partie A

1) a) Calcul d'intégrale :

$$I=\int_1^4 f(x).dx=\left[\frac{-x^3}{6}+x^2-\frac{3x}{2}\right]_1^4=\left(\frac{-2}{3}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)=0$$

b) Les aires algébriques des intervalles $[1;3]$ et $[3;4]$ se compensent mutuellement, elles sont donc égales en valeurs absolues

2) a) le trinôme f possède 2 racines $x_1=1$ et $x_2=3$; le coefficient dominant de f est négatif donc on déduit le signe de f :

x	1		3		4
$f(x)$	0	+	0	−	

b) $A_f=\displaystyle\int_1^4 |f(x)|.dx=\int_1^3 f(x).dx-\int_3^4 f(x).dx=\left(0-\left(\frac{-2}{3}\right)\right)-\left(\frac{-2}{3}-0\right)=\frac{4}{3}\,ua$

Partie B

1) a) soit $t\geqslant 1$, $\dfrac{1}{t}\geqslant 2-t \Leftrightarrow \dfrac{1}{t}+t-2\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t+1}{t}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^2}{t}\geqslant 0 \Leftrightarrow (t-1)^2\geqslant 0$ cette dernière inégalité étant toujours vérifiée , on déduit que $\forall t\geqslant 1 \;:\; \dfrac{1}{t}\geqslant 2-t$

b) on intègre cette relation sur l'intervalle $[1;x]$:

donc $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}.dt\geqslant\int_1^x (2-t).dt$ donc $[\ln(t)]_1^x\geqslant[2t-0,5t^2]_1^x$

donc $\ln(x)-\ln(1)\geqslant 2x-0,5x^2-1,5$ donc $g(x)\geqslant f(x)$

Ainsi : $\forall x\geqslant 1 : g(x)\geqslant f(x)$

2) a) Soit $G(x)=x.ln(x)-x$ pour tout $x\geqslant 1$

donc $G'(x)=\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)=g(x)$

donc G est une primitive de g sur $[1;+\infty[$

b) Soit l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ délimité par C_f , C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$

donc $A=\displaystyle\int_1^4 |f(x)-g(x)|.dx=\int_1^4 (g(x)-f(x)).dx$

soit encore $A=\displaystyle\int_1^4 g(x).dx-\int_1^4 f(x).dx=\int_1^4 g(x).dx-0$

$A=[G(x)]_1^4=G(4)-G(1)=(4\ln(4)-4)-(1\ln(1)-1)=4\ln 4-3=8\ln 2-3$

Ex 3 : **(8 pts)**

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on appelle f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$f_n(x)=\dfrac{e^{-n.x}}{1+x}$ et (I_n) la suite définie par $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-n.x}}{1+x}.dx$

De même on appelle g_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$g_n(x)=\dfrac{e^{-n.x}}{(1+x)^2}$ et (J_n) la suite définie par $J_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-n.x}}{(1+x)^2}.dx$

Partie A : Étude graphique

1) Calculs des 1ers termes des suites (I_n) et (J_n)
$I_0 \simeq 0{,}693\ ; I_1 \simeq 0{,}463\ ; I_2 \simeq 0{,}333$ | $J_0 \simeq 0{,}5\ ; J_1 \simeq 0{,}352\ ; J_2 \simeq 0{,}265$

2) On peut donc conjecturer que les suites (I_n) et (J_n) sont décroissantes, minorées par 0 , majorées par 1 et convergentes vers 0

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1) a) soit $x \in [0;1]$ alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $1 \leqslant x+1 \leqslant 2$
par ailleurs si $x+1 \geqslant 1$ alors $(x+1)^2 \geqslant x+1 \geqslant 1$
donc $1 \leqslant x+1 \leqslant (x+1)^2 \leqslant 4$ donc $0 < \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1$
donc $\forall x \in [0;1]$: $0 < \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$

b) on sait que $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$: $e^{-nx} > 0$
donc par produit, $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$: $0 < \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$

2) Étudier le sens de variations de la suite (I_n)
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x}.dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}.dx$$
donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(n+1)x}}{1+x} - \frac{e^{-nx}}{1+x}\right).dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{-nx}}{1+x}\right)(e^{-x}-1).dx$
or $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant -x \leqslant 0$ donc $e^{-x} \leqslant e^0$
donc $e^{-x} - 1 \leqslant 0$; par ailleurs $\frac{e^{-nx}}{1+x} > 0$
donc $\left(\frac{e^{-nx}}{1+x}\right)(e^{-x}-1) \leqslant 0$ donc $\int_0^1 \left(\frac{e^{-nx}}{1+x}\right)(e^{-x}-1).dx \leqslant 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$
par conséquent, la suite (I_n) est décroissante

3) la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente d'après le *th de convergence des suites monotones*

Partie C : Étude de la suite (J_n)

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < J_n < I_n$ [on pourra utiliser la question B)1)b)]
On sait que $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$: $0 < \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$

on intègre cette relation sur l'intervalle $[0;1]$:
$$\int_0^1 0.dx < \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}.dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}.dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}.dx$$

donc $0 < J_n \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx}.dx$

soit encore $0 < J_n \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < J_n \leqslant I_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$

2) On <u>admet</u> que la suite (J_n) est décroissante ;
donc la suite (J_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente d'après le *th de convergence des suites monotones*

Par ailleurs, $0 < J_n \leqslant I_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$

or $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$, $\lim_{n \to +\infty} (1-e^{-n}) = 1$, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$
ainsi $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1-e^{-n}}{n}\right) = 0$

d'après le *th des gendarmes* on peut donc en déduire que :
$\lim_{n \to +\infty} (J_n) = 0$