Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Dans le repère donné, A a pour coordonnées $(0,0,0)$, B$(1,0,0)$, D$(0,1,0)$ et E$(0,0,1)$.
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$.
La droite (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ de coordonnées $(1,-1,1)$; de plus elle passe par le point D$(0,1,0)$.
La droite (FD) a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1,-1,1)$. Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ directeurs du plan (BGE).
$\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées $(1,0,-1)$; $\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 1\times 1 + (-1)\times 0 + 1\times(-1) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EB}$.
$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1,1,0)$; $\vec{n}.\overrightarrow{BG} = 1\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$.
Donc le vecteur $\vec{n}\ (1,-1,1)$ est normal au plan (BGE).
Le plan (BGE) a pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par le point B ; c'est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y,z)$ tels que $\vec{n} \perp \overrightarrow{BM}$.
$\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x-1,y,z)$;
$\vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \iff 1\times(x-1) + (-1)\times y + 1\times z = 0 \iff x-y+z-1 = 0$.
L'équation cartésienne du plan (BGE) est $x-y+z-1=0$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est égal au vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).
Les coordonnées (x,y,z) du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ x-y+z-1 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ t-(1-t)+t-1 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & t \\ y = & 1-t \\ z = & t \\ 3t = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1 ; donc $\mathrm{BE} = \mathrm{EG} = \mathrm{BG} = \sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.
Soit H le milieu de [EG] ; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BGE de côté $a = \sqrt{2}$.
Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur est égale à $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (relations dans un triangle rectangle) ; donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur $\mathrm{BH} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5. Le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\dfrac{\text{aire(BEG)} \times \text{KD}}{3}$.

Dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$:

$\text{KD}^2 = (x_D - x_K)^2 + \left(y_D - y_K\right)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{12}{9}$

donc $KD = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

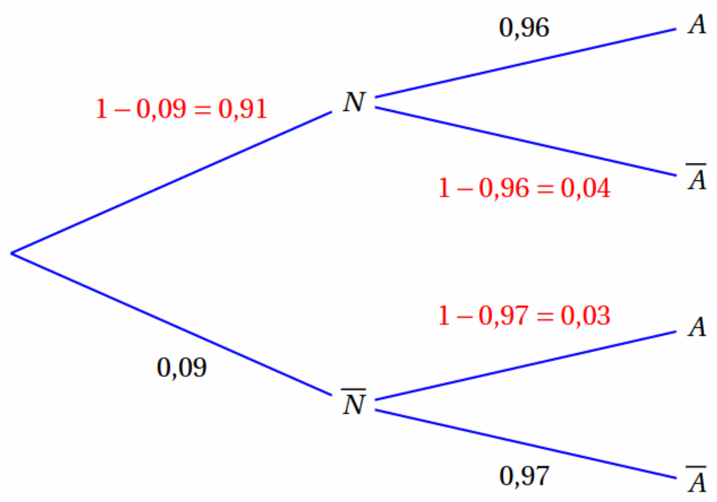
- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment :



2. La probabilité qu'une peluche soit acceptée est $P(A)$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(N \cap A) = P(N) \times P_N(A) = 0{,}91 \times 0{,}96 = 0{,}8736 \\ P\left(\overline{N} \cap A\right) = P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) = 0{,}09 \times 0{,}03 = 0{,}0027 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) = 0{,}8736 + 0{,}0027 = 0{,}8763$$

3. La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit aux normes est $P_A(N)$:

$$P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}8736}{0{,}8763} \approx 0{,}9969$$

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur. On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$.

   Si D suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(D \leqslant a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

   Donc $P(D \leqslant 4) = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0,5 \iff 0,5 = \mathrm{e}^{-4\lambda} \iff \ln 0,5 = -4\lambda \iff \lambda = -\dfrac{\ln 0,5}{4}$

2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.

   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

   La probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5)$.

   On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{D \geqslant t}(D \geqslant s + t) = P(D \geqslant s)$.

   Donc $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5) = P(D \geqslant 5) = 1 - P(D \leqslant 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-5 \times 0,1733} \approx 0,4204$

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. D'après le cours, la variable aléatoire $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.
2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$.

   $J \leqslant 385 \iff J - 358 \leqslant 27 \iff \dfrac{J - 358}{\sigma} \leqslant \dfrac{27}{\sigma}$ car σ est un nombre strictement positif.

   On cherche donc σ pour que $P\left(X \leqslant \dfrac{27}{\sigma}\right) \leqslant 0,975$ sachant que X suit la loi normale centrée réduite.

   La calculatrice donne $\dfrac{27}{\sigma} \approx 1,96$ ce qui équivaut à $\sigma \approx 13,77$. On prendra donc $\sigma = 14$.