EXERCICE 3 **Commun à tous les candidats** **7 points**

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$u_0 = 1\,000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. **a.** On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1\,000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

   D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.

   Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1{,}2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1\,000$.

   b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000 g.

   On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30\,000$.

   À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28\,103$ et $u_{23} \approx 33\,624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

   c. On complète l'algorithme :

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que $u \leqslant 30\,000$ faire u prend la valeur $1{,}2 \times u - 100$ n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

2. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \geqslant 1000$.

   - $u_0 = 1000 \geqslant 1000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p \geqslant 1\,000$.
     $u_{p+1} = 1{,}2\,u_p - 100$; $u_p \geqslant 1000$ donc $1{,}2\,u_p \geqslant 1\,200$ donc $1{,}2\,u_p - 100 \geqslant 1\,100$.
     Donc $1{,}2\,u_p - 100 \geqslant 1000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   Pour tout n, $u_n \geqslant 1\,000$.

   b. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1{,}2\,u_n - 100 - u_n = 0{,}2\,u_n - 100$

   Or, pour tout n, $u_n \geqslant 1000$ donc $0{,}2\,u_n \geqslant 200$ et donc $0{,}2\,u_n - 100 \geqslant 100$

   On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

   On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ donc, $u_n = v_n + 500$.

   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2\,u_n - 100 - 500 = 1{,}2(v_n + 500) - 600 = 1{,}2\,v_n + 600 - 600 = 1{,}2\,v_n$

   $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

   b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}2^n$.

   Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1{,}2^n$.

   c. La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif ; or $1{,}2 > 1$ donc, d'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie B : second modèle – avec une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$.

1. **a.** $f(0) = \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^0} = \dfrac{50}{1+49} = 1$

   b. Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$ donc $1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 1$ et donc $\dfrac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}} < 1$

   On en déduit que $\dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.

   c. La fonction $t \longmapsto -0{,}2t$ est décroissante sur $\mathbf{R}$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est croissante sur $\mathbf{R}$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

   On en déduit que la fonction $t \longmapsto 1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

   La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

   On en conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbf{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$.

   d. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}2t = -\infty$; on pose $T = -0{,}2t$. Or $\lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0$.

   On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1$ et donc que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$.

2. On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.

   - $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg ;
   - $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;
   - f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ;
   - $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. On résout l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$:

$$\begin{array}{rll}
f(t) > 30 & \iff \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}} > 30 & \\
& \iff 50 > 30 + 30 \times 49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} & \text{car } 1+49\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0 \text{ pour tout } t \\
& \iff \dfrac{50-30}{30\times 49} > \mathrm{e}^{-0{,}2t} & \\
& \iff \dfrac{2}{147} > \mathrm{e}^{-0{,}2t} & \\
& \iff \ln\left(\dfrac{2}{147}\right) > -0{,}2t & \text{croissance de la fonction ln sur } [0\,;\,+\infty[\\
& \iff \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{147}\right)}{-0{,}2} < t & \text{division par un nombre négatif}
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{147}\right)}{-0{,}2} \approx 21{,}5$ donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

EXERCICE 2 — COMMUN À TOUS LES CANDIDATS — 4 POINTS

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. a. Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$.

$z_1 = 1 - \dfrac{1}{z_0} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - 2 = -1$; $z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$;

ensuite on retrouve $z_4 = \dfrac{1}{2}$, $z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$.

$z_1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = 1 - \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+1} = \dfrac{2-1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$;

$z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}} = 1 - \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{-1+1+\mathrm{i}+\mathrm{i}}{1+1} = \mathrm{i} = z_0$;

ensuite on retrouve $z_4 = z_1 = 1 + \mathrm{i}$, puis $z_5 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ et $z_6 = \mathrm{i}$.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$, pour $n \in \mathbb{N}$.

On démontre cette conjecture par récurrence sur n :

- **Initialisation :** on a bien $z_{3\times 0} = z_0$.
- **Hérédité :** supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $z_{3p} = z_0$, alors

$$z_{3(p+1)} = z_{3p+3} = 1 - \frac{1}{z_{3p+2}} = 1 - \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z_{3p+1}}} = 1 - \frac{z_{3p+1}}{z_{3p+1} - 1} = \frac{z_{3p+1} - 1 - z_{3p+1}}{z_{3p+1} - 1}$$

$$= \frac{-1}{z_{3p+1} - 1} = \frac{-1}{1 - \dfrac{1}{z_{3p}} - 1} = \frac{-1}{-\dfrac{1}{z_{3p}}} = z_{3p} = z_0.$$

- **Conclusion :** on a donc démontré que $z_{3\times 0} = z_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $z_{3p} = z_0$, alors $z_{3(p+1)} = z_0$: d'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

2. Comme $2016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2016} = z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3. On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore

$z_0^2 = z_0 - 1 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_0 - \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \\ z_0 - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_0 & = & \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1 = z_0$.

Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites (z_n) sont constantes.