Ex 1 :

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(1, -1, -1)$ et $(2, -5, -3)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $k = 2$ à partir de la première coordonnée et $-k = -5$ ou encore $k = 5$ à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et il n'existe donc pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

2) Ainsi, les trois points A, B et C définissent un unique plan.

a)

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan (ABC) ou encore

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ est orthogonale au plan (ABC).}}$$

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(0, 4, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$. Une équation cartésienne de ce plan est $2(x - 0) - (y - 4) + 3(z - 1) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (ABC) est } 2x - y + 3z + 1 = 0.}$$

c) Δ est la droite passant par $D(7, -1, 4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.}$$

d) Soit $M(7 + 2t, -1 - t, 4 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 28 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Quand $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(3, 1, -2)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (3, 1, -2).}$$

3) a) $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1, 1, 1)$ et $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1, 4, 0)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les plans } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ sont sécants en une droite.}}$$

b) Soit $M(-4t - 2, t, 3t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d.

$$(-4t - 2) + (t) + (3t + 2) = 0$$

et

$$(-4t - 2) + 4(t) + 2 = 0.$$

Ainsi, tout point de d appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et donc

$$\boxed{\text{la droite d est la droite d'intersection des plans } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2.}$$

c) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{u'}(-4, 1, 3)$ et un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 2 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite d est parallèle au plan (ABC).}}$$

Ex 2 :

Partie A

Restitution organisée de connaissances

• Si Δ est orthogonale à toute droite du plan P, en particulier Δ est orthogonale aux droites D_1 et à D_2.

• Réciproquement, supposons que Δ soit orthogonale aux droites D_1 et à D_2. Il revient au même de dire que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Soient D une droite du plan P puis $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D.

Puisque les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux droites sécantes du plan P, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P. Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan P, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}.$$

Mais alors

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\left(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}\right) = \lambda\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 0 + 0 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$ ou encore la droite Δ est orthogonale à D.

On a ainsi montré que si Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan P, alors Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Partie B

Affirmation 1	**VRAI**
Affirmation 2	**FAUX**
Affirmation 3	**VRAI**
Affirmation 4	**VRAI**

Justification 1. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{v}(1, 3, -2)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4, -2, -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-1, -1, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan P.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 4 + 3 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 4 - 6 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) = -1 - 3 + 4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites (AB) et (AC).
On en déduit que la droite Δ est orthogonale à toute droite du plan P. L'affirmation 1 est vraie.

Justification 2. Puisque la droite Δ est orthogonale à la droite (AB), les droites Δ et (AB) ne sont pas parallèles et donc sont sécantes ou non coplanaires.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4u \\ y = -1 - 2u \\ z = 1 - u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

Soient $M(t, 3t-1, -2t+8)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ et $N(4u, 1-2u, 1-u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3t - 1 = 1 - 2u \\ -2t + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 3(4u) - 1 = 1 - 2u \\ -2(4u) + 8 = 1 - u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ 14u = 2 \\ 7u = 7 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 4u \\ u = \dfrac{1}{7} \\ u = 1 \end{array}\right. .$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites Δ et (AB) ne sont pas sécantes. On en déduit que les droites Δ et (AB) ne sont pas coplanaires. L'affirmation 2 est fausse.

Justification 3. Les points A, B et C définissent un unique plan à savoir le plan (ABC).

- $x_A + 3y_A - 2z_A + 5 = 0 - 3 - 2 + 5 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_B + 3y_B - 2z_B + 5 = 4 - 9 + 0 + 5 = 0$. Donc le point B appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
- $x_C + 3y_C - 2z_C + 5 = -1 - 6 + 2 + 5 = 0$. Donc le point C appartient au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

Ainsi, les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $x + 3y - 2z = 0$. L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4. Le plan (ABC) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 3, -2)$ et la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 11 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times (-2) = 11 - 3 - 8 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et donc la droite D est parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ qui est le plan (ABC). Plus précisément, la droite D est strictement parallèle au plan (ABC) ou incluse dans le plan (ABC). D'autre part,

$$x_O + 3y_O - 2z_0 + 5 = 0 + 0 + 0 + 5 = 0t + 5 = 5.$$

Donc, le point O n'appartient pas au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$ et on en déduit que la droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$. L'affirmation 4 est vraie.