II – Probabilités et suites

On note A_n l'événement « le gestionnaire des stocks a approvisionné le produit la n-ième semaine » et $p_n = P(A_n)$ sa probabilité.

Le gestionnaires des stocks a constaté que :

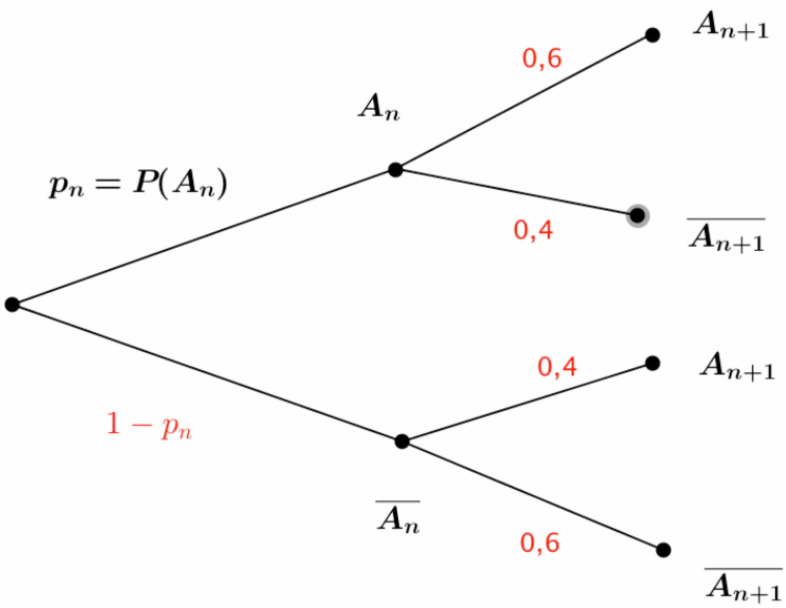
1. a. Il a approvisionné un produit la 1ère semaine donc $p_1 = 1$.;

   b. S'il l'a approvisionné la n-ième semaine, alors la probabilité qu'il doive l'approvisionner la (n+1)-ème est 0,6 donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}6$

   S'il ne l'a pas approvisionné la n-ième semaine, alors la probabilité qu'il doive l'approvisionner la (n+1)-ème semaine est de 0,4 donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}4$

   La somme des probabilité des branches partant d'un nœud est 1

   d'où l'arbre pondéré ci-dessous.



   c. $P(A_n \cap A_{n+1}) = p_n \times P_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}6p_n$

   $P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = (1 - p_n)P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}4(1 - p_n)$

   d. donc $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}4(1 - p_n) = 0{,}2p_n + 0{,}4$.

2. Soit (U_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = p_n - 0{,}5$.

   a. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}5 = 0{,}2p_n + 0{,}4 - 0{,}5 = 0{,}2p_n - 0{,}1$

   or $u_n = p_n - 0{,}5$ donc $p_n = u_n + 0{,}5$.

   donc $u_{n+1} = 0{,}2(u_n + 0{,}5) - 0{,}1 = 0{,}2u_n + 0{,}1 - 0{,}1 = 0{,}2u_n$

   donc cette suite est géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

   b. Donc $u_n = 0{,}5 \times 0{,}2^{n-1}$ et $p_n = 0{,}5 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}5$

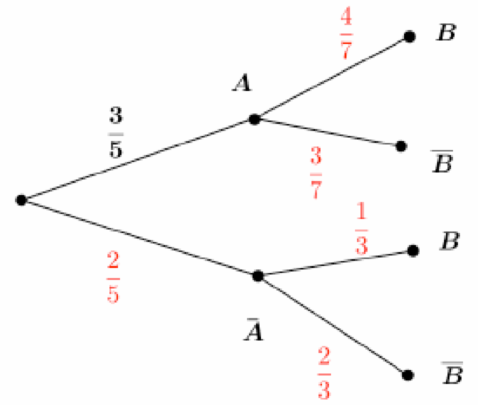
   c. $p_{15} = 0{,}5 \times 0{,}2^{14} + 0{,}5 = 0{,}5$ à 10^{-10} près.

   d. La suite (u_n) a une raison inférieure à 1 et un premier terme positif donc elle est décroissante et sa limite est 0 donc la limite de la suite (p_n) est 0,5.

   Le gestionnaire aura au bout d'un certain temps autant de chance de réapprovisionner que de ne pas réapprovisionner le produit.

III – Probabilités et algorithme *répondre sur la feuille*

Pour simuler une expérience aléatoire dont l'arbre pondéré est donné ci-dessous on a réalisé sur algobox l'algorithme suivant.



CODE DE L'ALGORITHME :

```
1   VARIABLES
2     T1 EST_DU_TYPE NOMBRE
3     T2 EST_DU_TYPE NOMBRE
4   DEBUT_ALGORITHME
5     T1 PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
6     SI (T1<=3) ALORS
7       DEBUT_SI
8       AFFICHER "événement A réalisé"
9       T2 PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,7)
10      SI (T2<=4) ALORS
11        DEBUT_SI
12        AFFICHER "événement B réalisé"
13        FIN_SI
14        SINON
15          DEBUT_SINON
16          AFFICHER "événement B non réalisé"
17          FIN_SINON
18      FIN_SI
19      SINON
20        DEBUT_SINON
21        AFFICHER "événement A non réalisé"
22        T2 PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,3)
23        SI (T2<=1) ALORS
24          DEBUT_SI
25          AFFICHER "événement B réalisé"
26          FIN_SI
27          SINON
28            DEBUT_SINON
29            AFFICHER "événement B non réalisé"
30            FIN_SINON
31        FIN_SINON
32
33  FIN_ALGORITHME
```

RÉSULTATS :

```
***Algorithme lancé***
événement A non réalisé
événement B réalisé
***Algorithme terminé***
```

Compréhension de l'algorithme :

D'après la ligne 5 quels sont les nombres entiers que peut prendre T1 ? 1, 2, 3, 4 et 5

Pour quelles valeurs de T1 A est-il réalisé ?
D'après les lignes 6 à 8 : 1, 2 et 3

Justifier la valeur de P(A) marquée sur l'arbre.
Il y a 3 possibilités sur 5 donc

$P(A) = \frac{3}{5}$

Si A est réalisé, d'après la ligne 9 les nombres entiers que peut prendre T2 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7

En déduire $P_A(B)$, puis $P_A(\bar{B})$, justifier. D'après les lignes10 à 13 B est réalisé si T2 prend les valeurs 1, 2, 3 et 4 donc

$P_A(B) = \frac{4}{7}$ et $P_A(\bar{B}) = \frac{3}{7}$

Si A n'est pas réalisé, la ligne 22 permet de savoir que T2 peut prendre les valeurs 1, 2 et 3

En déduire $P_{\bar{A}}(B)$, puis $P_{\bar{A}}(\bar{B})$, justifier.
D'après la ligne 23 si $\bar{A}$ est réalisé alorsB est réalisé si T2 prend la valeur 1donc
$P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3}$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{2}{3}$

Compléter l'arbre

Quelle est la probabilité du résultat affiché ?
$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Sur la copie inventer une situation qui correspond à cette expérience aléatoire