On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. $f\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) + 9 = 1 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + 9 = 5$
2. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$:
   $f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0$; $\Delta = 4 - 16 = -12 = -\left(2\sqrt{3}\right)^2$
   Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$
   On appelle A le point d'affixe $z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$
   $|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$
   Soit θ_A un argument de z_A : $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_A = -\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta_A = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
   Donc $z_A = 2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$
   Les nombres complexes z_A et z_B sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc $z_B = 2\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$
   $|z_A| = 2$ donc le point A se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. De plus la partie réelle de A vaut -1 donc A se trouve sur la droite d'équation $x = -1$. Idem pour B.
   Voir graphique page **??**.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   $f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$
   Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.
   $\Delta = 4 - 4(9-\lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$; $\Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$
   L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $]-\infty ; 8[$.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|f(z) - 8\right| = 3$
   $f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$; donc $\left|f(z) - 8\right| = \left|(z+1)^2\right| = |z+1|^2$ car le module d'un carré est égal au carré du module.
   Donc $\left|f(z) - 8\right| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3}$
   Soit Ω le point d'affixe -1, donc de coordonnées $(-1 ; 0)$; si on appelle M le point d'affixe z, alors $|z+1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$.
   L'ensemble des points M vérifiant $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$.
   On trace (F) sur le graphique (voir page **??**).

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. $f(z) = z^2 + 2z + 9 = (x+\mathrm{i}y)^2 + 2(x+\mathrm{i}y) + 9 = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y + 9$
   $= x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$
   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   $f(z)$ réel $\iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$
   Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

Le cercle (F) est de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$. Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(-1-\sqrt{3} ; 0\right)$ et $\left(-1+\sqrt{3} ; 0\right)$.
Les points A et B ont pour affixes z_A et z_B dont les parties réelles sont égales à -1 ; donc A et B sont situés sur la droite D_2.
$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 1\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point A appartient au cercle (F).
$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = \left|-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} + 1\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ donc le point B appartient au cercle (F).
Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :
$\left(-1-\sqrt{3} ; 0\right)$, $\left(-1+\sqrt{3} ; 0\right)$, $\left(-1 ; \sqrt{3}\right)$ et $\left(-1 ; -\sqrt{3}\right)$