T S1 Module : Suites & Fonctions (Correction) Nov 2016

Ex 1 :

1. a) Pour tout $x \in]-2,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{9}{(x+2)^2}$. La fonction f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$.

b) La fonction f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$. Si $1 \le x \le 5$, alors

$1 = f(1) \le f(x) \le f(5) = \dfrac{19}{7}$, donc $f(x) \in [0,5]$.

2. a) Montrons par récurrence que, pour tout n, $1 \le u_{n+1} \le u_n \le 5$.

$u_0 = 5$ et $u_1 = \dfrac{19}{7}$, donc la propriété est vérifiée pour n = 0.

Si pour n quelconque, $1 \le u_{n+1} \le u_n \le 5$, alors, la fonction f étant croissante sur $[1,5]$,

$1 = f(1) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n) \le f(5) \le 5$, donc $1 \le u_{n+2} \le u_{n+1} \le 5$. Donc la propriété est héréditaire.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

b) La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 1, par le théorème du cours, elle est donc convergente. Soit $\lim u_n = L$, avec $L \in [1,5]$. Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$, donc L vérifie l'équation

$L = \dfrac{4L-1}{L+2}$, soit $L^2 - 2L + 1 = 0$, d'où L = 1.

Ex 2 :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$, donc, par composition des limites,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1} = +\infty$; or $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

Limite en $+\infty$

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \dfrac{x+1}{x\sqrt{1+1/x+1/x^2}+x} = \dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x+1/x^2) = 1$, $\lim\limits_{X\to1}\sqrt{X} = 1$, donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+1/x+1/x^2} = 1$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x) = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f = \dfrac{1}{2}$.

La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Equation de la droite asymptote à C en $-\infty$

Pour tout $x < 0$, $f(x) + 2x + \dfrac{1}{2} = \sqrt{x^2+x+1} + x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1} - x - \dfrac{1}{2}}$.

3. Pour tout x, $g(x) = \sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$.

Pour tout x, $g\left(-\dfrac{1}{2}+x\right) = \sqrt{x^2+\dfrac{3}{4}} = g\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)$. Donc la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe.

Ex 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2(x+2)}{x^2+1}$. On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+2 - \dfrac{x+2}{x^2+1} = \dfrac{x^3+2x^2+x+2-x-2}{x^2+1} = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1} = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, donc la droite D d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe en $\pm\infty$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x+2) = -\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

Sur $]-\infty,-2[$, C est toujours strictement au-dessus de D.

Sur $]-2,+\infty[$, C est toujours strictement au-dessous de D.

C et D sont sécantes au point d'abscisse -2.

3. f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \dfrac{(3x^2+4x)(x^2+1) - 2x(x^3+2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+3x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}$.

Le discriminant de $x^2 - x + 4$ est strictement négatif, donc, pour tout x, $x^2 - x + 4 > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f'(x) est du signe de $x(x+1)$.

4. Les variations de f sont résumées dans le tableau.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f' (x)		+	0	-	0	+	
f (x)	$-\infty$	↗	1/2	↘	0	↗	$+\infty$

5. $f'(-2) = \dfrac{4}{5}$ et $f(-2) = 0$. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2 est $y = \dfrac{4}{5}(x+2)$.