Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \frac{1}{2}$.
   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.

   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

   a. Démontrer que $0 \leqslant I_2 \leqslant \mathrm{e} - \frac{1}{2}$.
   On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer I_n en fonction de n.

   c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.