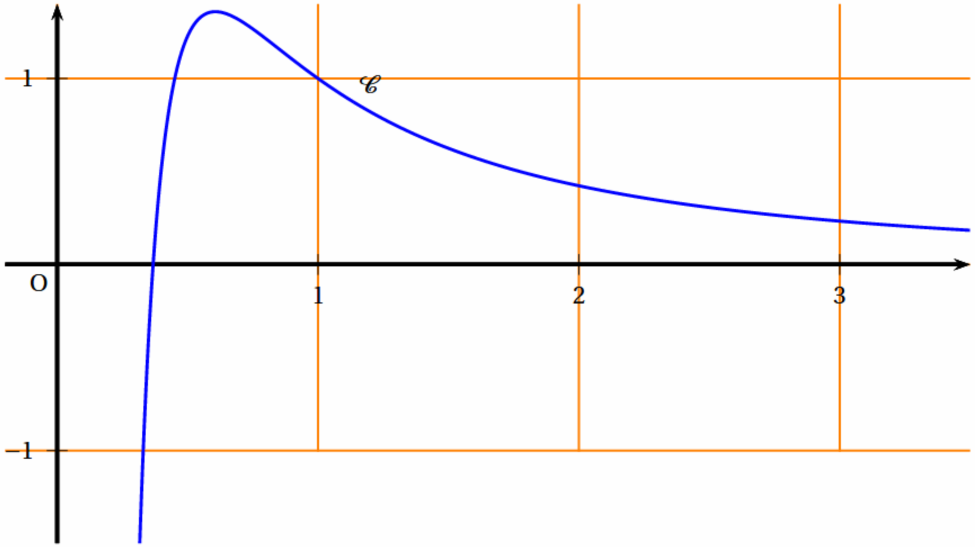
Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudions la limite de f en 0.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln(x)=-\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, alors par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$,

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, alors par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$,

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ que l'axe des abscisses est asymptote horizontale.à $\mathscr{C}$

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x\ln x}{x^4}=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

b. $-1-2\ln x>0 \iff \ln x<-\frac{1}{2} \iff x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

Pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$, $x^2>0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

On a $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{2}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	↘	0

3. **a.** On a : $f(x)=0 \iff 1+\ln x=0 \iff \ln x=-1 \iff x=\mathrm{e}^{-1}$

Ce qui prouve que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0\right)$

b. D'après le tableau des variations de f et sachant que $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=0$.

On en déduit que $f(x)>0$ sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ et $f(x)<0$ sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$

---

4. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=n$.

a. On sait que $f>0$ sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty[$, donc $I_n=\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$

Sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$ on a au vu des variations de f : $0<f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$. Comme l'intégration conserve l'ordre et le signe, on en déduit :

$0\leqslant I_2\leqslant\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{n}\frac{\mathrm{e}}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}\left(2-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}-\frac{1}{2}$ et finalement :

$0\leqslant I_2\leqslant\mathrm{e}-\frac{1}{2}$.

b. Calculons I_n en fonction de n. On a :

$$I_n = \left[\frac{-2-\ln x}{x}\right]_0^n = \frac{-2-\ln n}{n} - \left(\frac{-2-\ln(\mathrm{e}^{-1})}{\mathrm{e}^{-1}}\right) = \frac{-2-\ln n}{n} - (-2+1)\mathrm{e}$$

Et finalement :

$$I_n = \frac{-2-\ln n}{n} + \mathrm{e} = \mathrm{e} - \frac{\ln n}{n} - \frac{2}{n}$$

c. Étudions la limite de I_n en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \mathrm{e}$.

Graphiquement cela signifie que l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.