EXERCICE 4 **6 points**

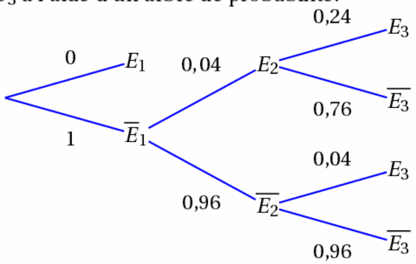
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

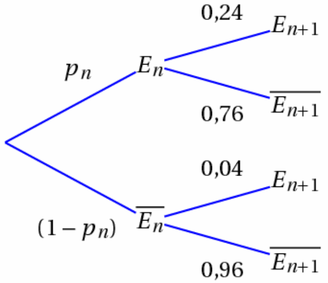


Théorème des probabilités totales : $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'évènements disjoints)
$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. (a) Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{(union d'évènements disjoints)}$$
$$p_{n+1} = 0,24 p_n + 0,04(1-p_n) = (0,24-0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$
et donc : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

(d) Limite de la suite (p_n).
Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$.

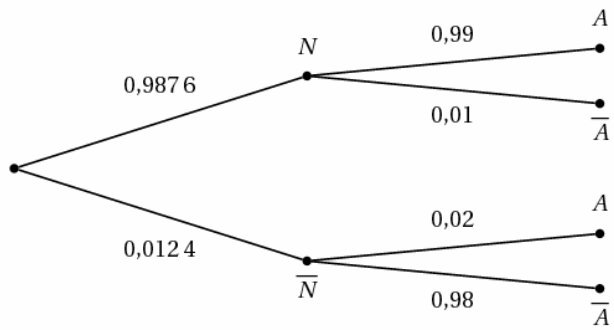
EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est
$P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)$.
La probabilité que la bille soit hors norme est donc :
$1-(P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)) = 1-(0,99379034 - 0,00620967) = 1-0,98758067 = 0,01241933$; donc une valeur approchée à $0,0001$ de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0,0124$.

2. **a.** On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :



b. D'après la formule des probabilités totales :
$$P(A) = P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A)$$
$$= 0,9876 \times 0,99 + 0,0124 \times 0,02 = 0,977724 + 0,000248 = 0,977972$$
$$\approx 0,9780$$
La probabilité de A est $0,9780$ (arrondie au dix-millième).

c. On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0,000248}{0,977972} \approx 0,0003$
La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est $0,0003$ (arrondie au dix-millième).

Partie B

1. La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

   Donc la variable aléatoire Y qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0124$.

2. L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$.

   Donc $E(Y) = np = 100 \times 0,0124 = 1,24$

   et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,0124 \times 0,9876} \approx 1,1066$.

3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y = 2)$.

   $P(Y=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{100}{2} \times 0,0124^2 \times 0,9876^{98} =$

   $50 \times 99 \times 0,0124^2 \times 0,9876^{98} \approx 0,224076 \approx 0,2241$.

4. Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.

   $P(Y \leqslant 1) = P(Y=0) + P(Y=1)$

   $$= \binom{100}{0} \times 0,0124^0 \times 0,9876^{100} + \binom{100}{1} \times 0,0124^1 \times 0,9876^{99}$$

   $$\approx 0,2871 + 0,3605 \approx 0,64768 \approx 0,6477.$$