Ex 1 : (Extrait BAC S – 2013)

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u_n + 1}{2(n+1)}$
   Affecter à n la valeur $n+1$.
2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « Afficher la variable u ».
3. La suite (u_n) semble être décroissante vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = n u_{n+1} - 1 = (n+1) \times \dfrac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \dfrac{n \times u_n + 1}{2} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{n \times u_n - 1}{2}$
   $\dfrac{1}{2} v_n$.
   Cette relation montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme
   $v_0 = 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$.
2. On a donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$.
   Or $v_n = n u_n - 1 \iff u_n = \dfrac{v_n + 1}{n} = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$.
3. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1 + (0,5)^n}{n} = \dfrac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} =$
   $\dfrac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.
   Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante (vers zéro).

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geqslant 0,001$ Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u + 1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n

Ex 2 : (Extrait Bac S – 2015)

1. $M(z)$ est invariant si $M' = M \iff z' = z \iff z^2+4z+3 = z \iff z^2+3z+3 = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4\times 3 = 9 - 12 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.

Cette équation a deux solutions :

$z_1 = \dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

On a $|z_1|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3}$.

Le même calcul donne $|z_2| = \sqrt{3}$.

On a donc $z_1 = \dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

On trouve de la même façon que $z_2 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

2. On a $z_A = z_2$, donc $|z_A| = OA = |z_2| = \sqrt{3}$.

De même $z_B = z_1$, donc $|z_B| = OB = |z_1| = \sqrt{3}$.

Enfin $AB = |z_B - z_A| = \left|\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - \left(\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$.

On a donc $OA = OB = AB = \sqrt{3}$: le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son point associé.

M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.

Or on sait que l'affixe du point M est :

$z^2+4z+3 = (x+\mathrm{i}y)^2 + 4(x+\mathrm{i}y) + 3 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + 4x + 4\mathrm{i}y + 3 = x^2 - y^2 + 3 + \mathrm{i}(2xy+4y)$.

On a donc $y' = 0 \iff 2xy+4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x+2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x & = & -2 \end{array}\right.$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).

4.