La fonction logarithme népérien

Définition

$\ln :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longmapsto \ln(x)$

La fonction « ln » peut être définie comme la fonction réciproque de la fonction « exp ».

Remarque : En termes simples, les effets des fonctions ln et exp se compensent.

Mathématiquement

- $]0\,;+\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp}]0\,;+\infty[$

  $x \longmapsto \ln x \longmapsto e^{\ln x} = x$

  $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{]0\,;+\infty[}$

- $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp}]0\,;+\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$

  $x \longmapsto e^x \longmapsto \ln(e^x) = x$

  $\ln \circ \exp = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$

Comportement aux bornes de $]0\,;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

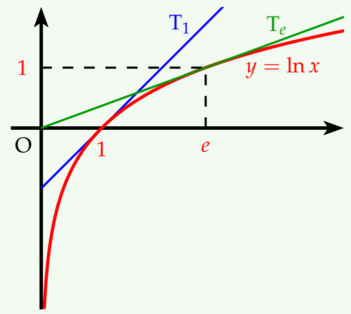
  $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{\ln}$ au voisinage de 0.

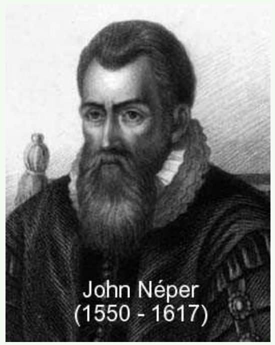
Carte d'identité de la fonction « ln »

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$	||	$+$		
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

$T_1 :\ y = x - 1$

$T_e :\ y = \dfrac{1}{e}x$





« ln » est une fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$

La fonction ln est donc continue sur $]0\,;+\infty[$.

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

La fonction « ln » est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque : On peut définir la fonction logarithme comme la fonction f dont la dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(1) = 0$

Propriétés algébriques

- $\forall x, y \in]0\,;+\infty[,\quad \ln xy = \ln x + \ln y$
- $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ n \in \mathbb{Z},\quad \ln x^n = n \ln x$
- $\forall x, y \in]0\,;+\infty[,\quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

  Cas particulier : $\forall y > 0,\ \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln y$
- $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad \ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$

Remarque : Historiquement la création de la fonction logarithme est dû à la « relation fonctionnelle » qui consiste à transformer un produit en somme.

Limites de référence à connaître et à reconnaître !

Croissance comparée

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x \ln x = 0$

Variation en 1

- $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

⚠ sans ces théorèmes, on aurait des formes indéterminées

Résolution d'équations et d'inéquations

- $\forall a, b > 0, \quad \ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
  On dit que la fonction ln réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$
- $\forall x > 0, \quad \ln x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = e^a$
- **Changements de variables :** le plus fréquent étant $X = \ln x$
  Le but est de se ramener à un problème simple (second degré, …)
- $\forall a, b > 0, \quad \ln a \geqslant \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqslant b$
  Car la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

  ⚠ Avant de résoudre une équation ou une inéquation impliquant « ln » penser à déterminer le domaine d'existence de cette équation ou cette inéquation.

Composée avec la fonction ln

$$\ln \circ u \;:\; x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{\ln} \ln[u(x)]$$

- $\ln[u(x)]$ existe ssi $x \in D_u$ et $u(x) > 0$.
- Si I est un intervalle non vide et si u est dérivable sur I et à valeur dans $]0\,;+\infty[$, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I

$$\forall x \in I, \quad (\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ alors $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Culture

1) Fonction logarithmes en base $a > 0$

$$\begin{array}{rcl} \log_a :]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a} \times \ln x \end{array}$$

- Si $a = e$, on retrouve la fonction logarithme népérien (standard pour les anglo-saxons)
- Si $a = 10$ on note $\log_{10} = \log$, la fonction logarithme décimal rencontré en physique et en chimie.

2) Quelques conséquences des relations fonctionnelles régissant « ln » et « exp »

- Si (u_n) est une suite géométrique à termes strictement positifs $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n)$ alors $(\ln u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $\ln u_0$ et de raison $r = \ln q$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln u_n = \ln(u_0 \times q^n) = \ln u_0 + \ln q^n = \ln u_0 + n \ln q$$

- Si (u_n) est une suite arithmétique $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr)$ alors (e^{u_n}) est une suite géométrique de premier terme e^{u_0} et de raison $q = e^r$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{u_n} = e^{u_0 + nr} = e^{u_0} \times e^{nr} = e^{u_0} \times (e^r)^n$$