La fonction exponentielle de base e

où $e \approx 2,718$ à 10^{-3} près

Définition et problème universel

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction f solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $f' = f$ satisfaisant à la condition $f(0) = 1$.

Remarque : On montre que cette fonction ne peut s'annuler, donc est positive sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est unique.

Comportement asymptotique

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

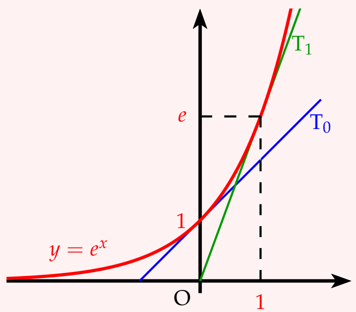
$y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_{\exp}$ au voisinage de $-\infty$

Carte d'identité de la fonction « exp »

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

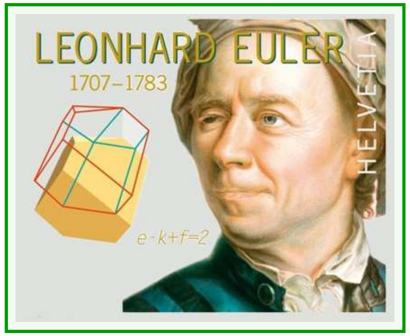
$T_0 : \ y = x + 1$

$T_1 : \ y = ex$



$$\exp \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$$
$$x \longmapsto \exp(x) = e^x \ \text{((notation d'Euler)}$$

Avantage : La notation d'Euler rend les propriétés algébriques « naturelles » donc faciles à manipuler et à mémoriser



exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp'(x) = \exp(x).$

Conséquence : comme , $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x > 0$, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Propriétés algébriques

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z} \quad (e^x)^n = e^{n\,x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

Cas particulier : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$

Limites de référence à connaître et à reconnaître !

Croissance comparée

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$

Variation en 0

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

⚠ sans ces théorèmes, on aurait des formes indéterminées

Résolution d'équations et d'inéquations

- $e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
  On dit que la fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;+\infty[$
- Si $\ a > 0, \quad e^x = a \quad \Leftrightarrow \quad X = \ln a$
- Si $\ a \leqslant 0, \quad e^x = a\ $ n'admet pas de solution
- **Changements de variables :** les plus fréquents étant $X = e^x$ ou $X = e^{-x}$
  Le but est de se ramener à un problème simple (second degré, ...)
- $e^a \geqslant e^b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqslant b$
  Car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

Composée avec l'exponentielle

$$\exp \circ u \ : \ x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{\exp}{\longmapsto} \exp[u(x)] = e^{u(x)}$$

- $\exp[u(x)]$ existe ssi $x \in D_u$
- $\exp \circ u$ est dérivable partout où la fonction u est dérivable.

$$\forall x \in D_{u'}, \ \ (\exp \circ u)'(x) = \exp'[u(x)] \times u'(x)$$

- On note : $(e^u)' = u'\, e^u$.
  Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ $ si $\ f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ $ alors $\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$

Culture : quelques fonctions « avatars » de exp

1) Fonction exponentielle de base $a > 0$
$\exp_a \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$

$$x \longmapsto a^x = e^{x \ln a}$$

Il s'agit d'un cas particulier de fonction composée avec $\ u \ : \ x \longmapsto u(x) = x \ln a$.

2) Fonction cosinus hyperbolique
$\text{ch} \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$

$$x \longmapsto \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) Fonction sinus hyperbolique
$\text{sh} \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$

$$x \longmapsto \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Vous disposez en terminale S de tous les outils pour vous faire une idée précise de ces fonctions ou famille de fonctions.