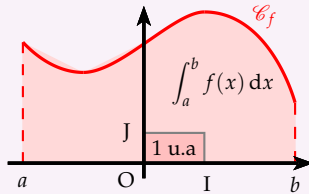


### Définition

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ .  
Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

On appelle **intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$**  la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

On la note :  $\int_a^b f(x) dx$



### Fonction paire et fonction impaire

- Si  $f$  est une fonction paire alors  $\forall a \in D_f$  :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx$$

- Si  $f$  est une fonction impaire alors  $\forall a \in D_f$  :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

### Valeur moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . On appelle valeur moyenne  $\mu$  de  $f$  sur  $[a; b]$  :

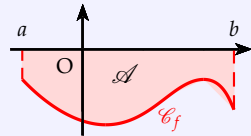
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

La formule de la moyenne est attribuée à Pierre-Gosselin Bonnet(1819-1892)

### Relations aire et intégrale

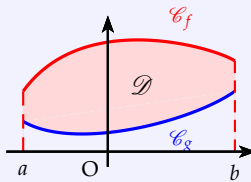
- Soit  $f \leq 0$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ .

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$$



- Soient deux fonctions  $f \geq g$  continues sur  $[a; b]$ .

$$\mathcal{D} = \int_a^b (f - g)(x) dx$$



## Intégration

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$f$  continue sur  $[a; b]$

### Inégalité de la moyenne

Si, pour tout  $x \in [a; b]$ , il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :  $m \leq f(x) \leq M$

Alors :  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

### Primitive

- **Théorème d'existence :**

Toute fonction  $f$  continues sur un intervalle  $I$  admet des **primitives** sur  $I$ .

- La fonction  $F : x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$  désigne l'**unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$** .  
 $F(a) = 0$  et  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

- **Lien entre primitive et intégrale :**

$$I = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_0^b = F(b) - F(a)$$

### Propriétés algébrique

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  :

- **Linéarité de l'intégrale**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- $\forall a \in I, \int_a^a f(x) dx = 0$

- $\forall a, b \in I, \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

- **Relation de Chasles**

$$\forall a, b, c \in I, \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

### Intégrale et inégalité

Soit  $f$  et  $g$  2 fonctions continues sur  $[a; b]$ .

- **Positivité**

Si  $f \geq 0$  sur  $[a; b]$  :  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

- **Intégration d'une inégalité**

Si  $f \geq g$  sur  $[a; b]$  :  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

⚠ On ne peut rien déduire du signe de  $f$  à partir du signe de son intégrale, de même on ne peut pas comparer deux fonctions  $f$  et  $g$  à partir de la comparaison de leurs intégrales.

### Quelques méthodes pour trouver une primitive

- 1) Le tableau des primitives usuelles.
- 2) Adapter un coefficient de façon à obtenir une forme que donne une primitive connue.

$$f(x) = \frac{1}{(3x+5)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x+5)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u^2(x)} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{3(3x+5)}$$

- 3) La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle dans le but de se ramener à 1)

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x+1} = 2 + \frac{3}{2x+1} \Rightarrow F(x) = 2x + \frac{3}{2} \ln |2x+1|$$

- 4) Il arrive parfois que l'on accède à deux intégrales  $I$  et  $J$  grâce à un système linéaire astucieux.

### Compléments : quelques calculs astucieux d'intégrales

$$1) I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x dx = \int_1^e u'(x)u(x) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e = \dots$$

$$2) I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \left[ \ln(\ln x) \right]_e^{e^2} = \dots$$

- 3) Utilisation des formules trigonométrique de duplication.

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u(x)u'(x) dx = \left[ \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \right] dx = \left[ \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

### Forme implicite

- En terminale, on doit parfois se résigner à prédire l'existence de primitives sans parvenir à les exhiber.

Par exemple, on ne sait pas déterminer l'unique primitive de « ln » qui s'annule en  $x = e$  de manière explicite mais on dispose d'une description explicite :  $\int_e^x \ln x dx$ .

- On peut montrer qu'il n'est pas possible d'exprimer une primitive de la fonction de Gauss  $x \mapsto e^{-x^2}$  à l'aide de fonction usuelles. Il faut donc parfois se résigner à manipuler des expressions abstraites.

On retrouve en probabilité cette intégrale dans la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite avec la fonction  $\Phi$

$$\Phi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On peut montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

### Intégration par parties

(méthode de calcul désormais hors programme)

- Cette méthode utilise la dérivée du produit :  $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables, de dérivée continues, sur  $[a; b]$ .

(On dit que  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$ )

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[ u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

En effet :

$$\left[ u(x)v(x) \right]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[ u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

- Calculer :  $I = \int_1^e x \ln x dx$ , on pose alors  $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$I = \int_1^e x \ln x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}e^2 - 0 - \left[ \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$