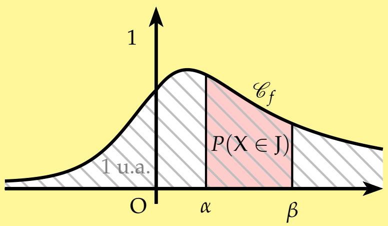
Lois à densité. Loi normale

1 Lois à densité

1.1 Généralités

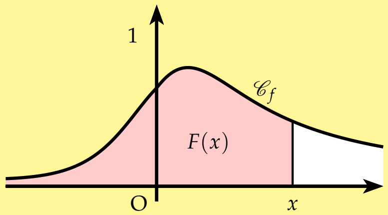
Définition 1 On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue X, la fonction f continue et positive sur un intervalle I ($[a;b]$, $[a;+\infty[$ ou $\mathbb{R}$) telle que :

- $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = \displaystyle\int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$, on a : $P(X \in \mathrm{J}) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t$



- La fonction F définie par : $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée la **fonction de répartition** de la variable X

$$F(x) = \int_{\substack{a\\-\infty}}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$



- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X, de densité f sur I, est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{(\mathrm{I})} t\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Loi uniforme

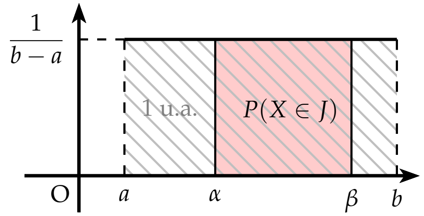
Définition 2 X suit une loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a, b]$, alors :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a :

$$P(X \in \mathrm{J}) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$

La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.



1.3 Loi exponentielle

Définition 3 X suit une loi exponentielle de paramètre réel λ alors : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

On a les relations suivantes

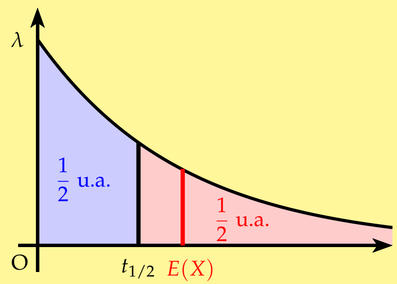
- La fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $P(\mathrm{X} \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$ et $P(\mathrm{X} \geqslant a) = e^{-\lambda a}$
- $P(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Théorème 1 La loi exponentielle est une loi **sans mémoire**

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{\mathrm{X} \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(\mathrm{X} \geqslant h)$$

Théorème 2 X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

- l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\lambda}$
- La demi vie : $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$
- $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\,t_{1/2}$



2 La loi normale

2.1 La loi normale centrée réduite

Définition 4 On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

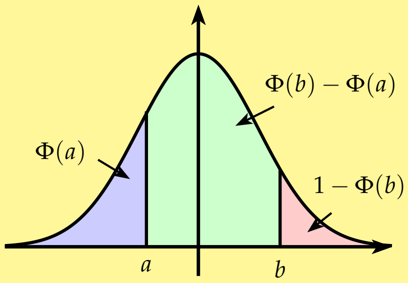
X suit une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0,1)$, si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ.

Sa fonction de répartition Φ vaut : $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

L'espérance de X vaut 0 et son écart-type 1 d'où $\mathcal{N}(0,1)$

Théorème 3 X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors pour tous réels a et $b > a$ on a :

- $P(X \leqslant a) = \Phi(a)$
- $P(X \geqslant b) = 1 - \Phi(b)$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leqslant -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$



Théorème 4 X est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$:

- $P(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0,95$
- $P(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) = 0,99$

2.2 La loi normale générale

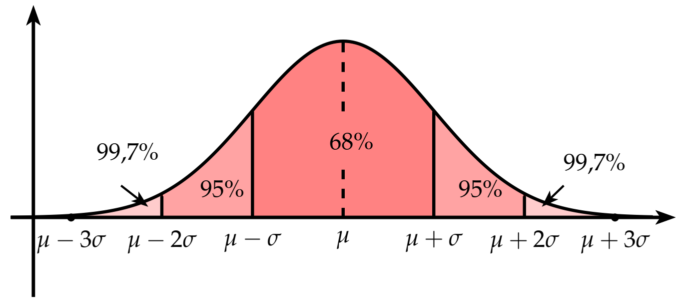
Définition 5 Changement de variable

X suit une loi normale de paramètres $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

On a alors : $\mathrm{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$

On obtient les intervalles caractéristiques :



2.3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 5 Théorème de Moivre-Laplace

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Z tel que :

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

Conditions de l'approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

⚠ Faire la correction de continuité : $P(7 \leqslant X \leqslant 15) = P_N(6,5 \leqslant X \leqslant 15.5)$