

# Formulaire sur les complexes

## 1 Définition

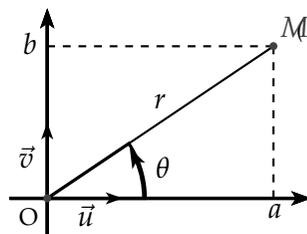
La forme algébrique d'un nombre complexe  $z$  est de la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

La partie réelle de  $z$  :  $\text{Re}(z) = a$

La partie imaginaire de  $z$  :  $\text{Im}(z) = b$

Le module de  $z$  :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



## 2 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe  $z$  est noté  $\bar{z} = a - ib$ .

Pour tout  $z$  complexe, on a :  $z\bar{z} = |z|^2$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad , \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' \quad , \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad , \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \quad , \quad z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$$

$z$  réel alors :  $z = \bar{z}$  ,  $z$  imaginaire pur alors :  $z + \bar{z} = 0$

## 3 Second degré

Équation du second degré à coefficients réels dans  $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{on a :} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \quad 2 \text{ racines réelles :} \quad \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \quad 1 \text{ racine double :} \quad \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \quad 2 \text{ racines complexes conjuguées :} \quad \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

## 4 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe  $z$  ( $z \neq 0$ ) est de la forme :

$$z = r(\cos \theta) + i \sin \theta \quad \text{et} \quad z = re^{i\theta}$$

$$\text{avec} \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \theta \quad [2\pi]$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

On a les relations :  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  et  $-1 = e^{i\pi}$

$$|z z'| = |z| |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\text{formule de Moivre :} \quad z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

$$\text{formule d'Euler :} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\text{Si } z = r e^{i\theta} \quad \text{alors} \quad \bar{z} = r e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

## 5 Vecteur, alignement et orthogonalité

Soit les point A, B, C et D, on a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$  alors  $AB = |z_B - z_A|$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

- $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

- $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  orthogonaux  $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$  imaginaire pur.