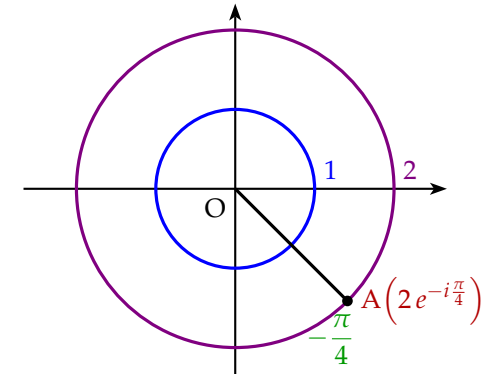
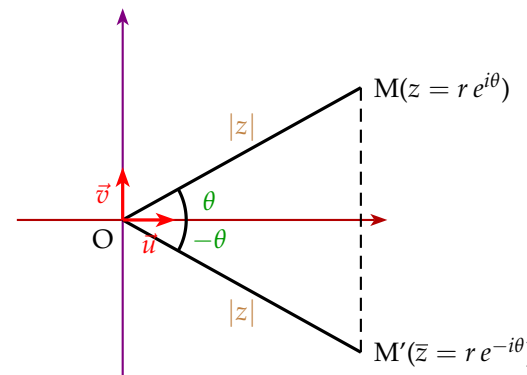
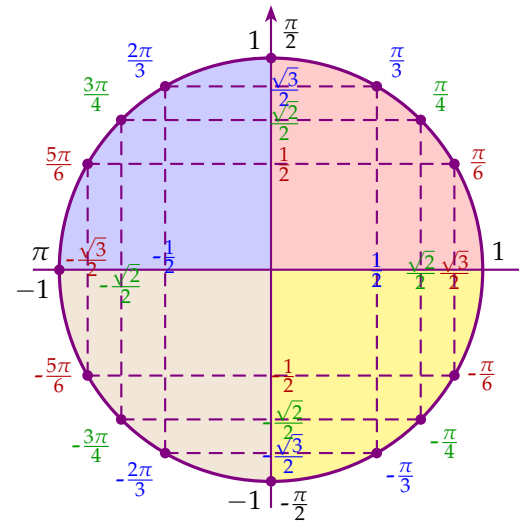
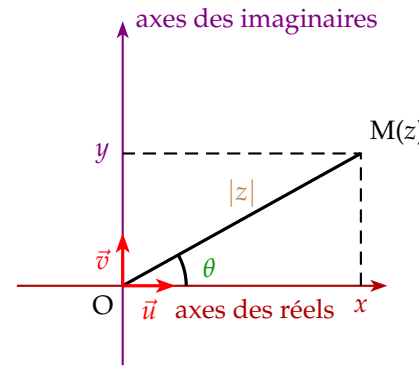


Construire à la règle et au compas le point A d'affixe : $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$



| | |
|----------------------|----------------------|
| $\cos \theta \leq 0$ | $\cos \theta \geq 0$ |
| $\sin \theta \geq 0$ | $\sin \theta \geq 0$ |
| $\cos \theta \leq 0$ | $\cos \theta \geq 0$ |
| $\sin \theta \leq 0$ | $\sin \theta \leq 0$ |



- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Forme algébrique

$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$
 $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
 $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$z = x + iy$ où $\begin{cases} x = \operatorname{Re}(z) \\ y = \operatorname{Im}(z) \end{cases}$

Module :

$|z| = \operatorname{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Argument : $(\vec{u}, \overrightarrow{\operatorname{OM}})$, $|z| \neq 0$

$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta &= \frac{y}{|z|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \theta + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$

Valeurs remarquables

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Forme trigonométrique

$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$
 où $|z| \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Forme exponentielle

$z = |z| e^{i\theta} = r e^{i\theta}$

$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$
 $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$
 $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Formule d'Euler

$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

C'est au XIX^e siècle, grâce à Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que l'aspect géométrique des nombres complexes gagne ses lettres de noblesse.



Les figures géométriques

Les points

- A, B, C sont trois points alignés ssi les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires c'est à dire ssi

$$z_{\vec{AC}} = kz_{\vec{AB}} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$$

- A, B, C sont trois points alignés ssi :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Les cercles

- $M \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow |z_M - z_\Omega| = r$
- $M \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2 = r^2$

Reconnaître une équation de cercle

Exemple : Soit \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 + x + y - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 + y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

\mathcal{C} est de centre $\Omega \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{13}{2}}$

Les droites

- Si (D) n'est pas une droite verticale, elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$.

- Toute droite (D) admet comme équation cartésienne :
 $ax + by + c = 0$

- Droites particulières :

- 1) L'axe des abscisses a pour équation : $y = 0$
- 2) L'axe des ordonnées a pour équation : $x = 0$
- 3) Si M est un point de la médiatrice de [AB]
 $\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

Triangle rectangle

- ABC rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$
- ABC rectangle en A $\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur)
- Si on joint un point M aux extrémités d'un diamètre [AB] alors ABM est rectangle en M.

Triangle isocèle

- ABC isocèle en A $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$
- ABC isocèle rectangle en A $\Leftrightarrow AB = AC$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$

Triangle équilatéral

- ABC est équilatéral $\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$
- ABC équilatéral
 \Leftrightarrow ABC isocèle en A et $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$