

# Probabilités conditionnelles

## Loi binomiale

### 1 Probabilité

#### 1.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement  $A$  est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire  $e_i$  est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement  $A$  est l'événement noté  $\bar{A}$  formé de tous les éléments de  $\Omega$  n'appartenant pas à  $A$ .
- L'événement  $A \cap B$  (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de  $\Omega$  appartenant à  $A$  et à  $B$ .
- L'événement  $A \cup B$  (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de  $\Omega$  appartenant au moins à l'un des événements  $A$  ou  $B$ .
- Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .
- Si  $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  et si à chaque issue  $e_i$  on associe un nombre  $P(e_i)$  tel que  $0 \leq P(e_i) \leq 1$  et  $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$ , on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur  $\Omega$ .
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements  $A$  et  $B$  :

- $P(\emptyset) = 0$ ;  $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ ;  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
(si  $A$  et  $B$  sont incompatibles alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ )
- Pour une loi équirépartie :

$$P(A) = \frac{\text{nbre d'éléments de } A}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

#### 1.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire  $X$  définie sur un univers  $\Omega$  est une fonction qui à chaque issue associe un réel  $x_i$ . La probabilité que  $X$  prenne la valeur  $x_i$  est alors notée  $P(X = x_i)$  ou  $p_i$ .

- Définir la loi de probabilité de  $X$ , c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements  $X = x_i$ .
- Espérance mathématique de  $X$  :  $E(X) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$   
L'espérance représente la valeur moyenne que prend  $X$  si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire
- Variance de  $X$  :  $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X) = p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2 - E^2(X)$
- Écart-type de  $X$  :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Exemple :** On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire.  $X$ , la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs  $-3$  et  $6$ .

$$\text{On a } P(X = 6) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27} \quad \text{et} \quad P(X = -3) = 1 - P(X = 6) = \frac{19}{27}$$

$$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$V(X) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

### 2 Probabilités conditionnelles

Etant donné deux événements  $A$  et  $B$  ( $B \neq \emptyset$ ) d'un univers  $\Omega$ . On appelle probabilité de  $B$  sachant  $A$ , le réel noté  $P_A(B)$  tel que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On a alors :  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

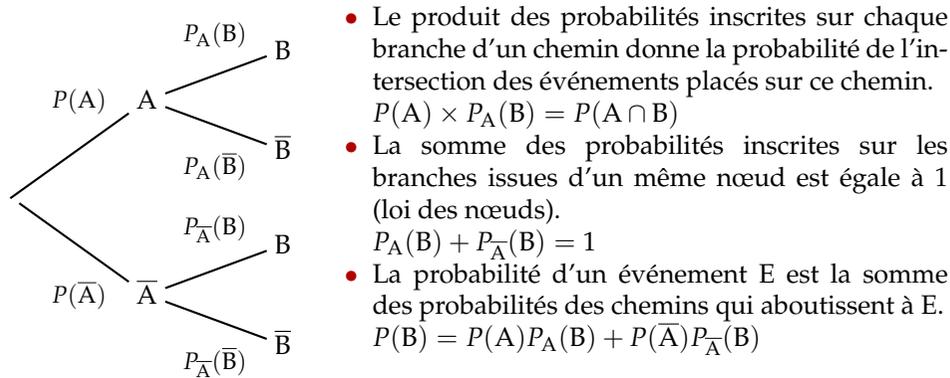
**Formule des probabilités totales**

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une partitions de  $\Omega$  (2 à 2 incompatibles et leur union forme  $\Omega$ ), alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

**Représentation par un arbre pondéré**

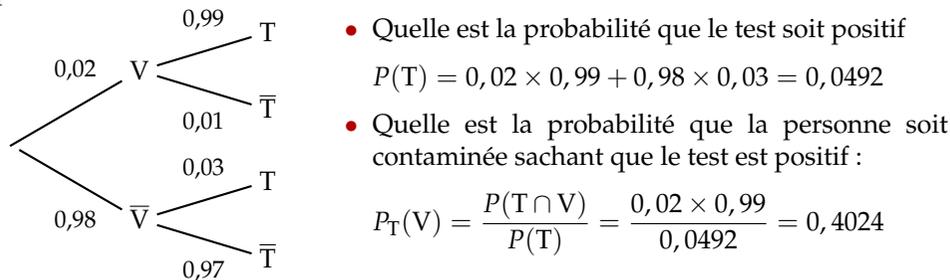
Le cas le plus fréquent correspondond à la partition la plus simple (A et  $\bar{A}$ ). Si on connaît les probabilité de B et  $\bar{B}$  par l'intermédiaire de A et  $\bar{A}$ , on a l'arbre suitvant :



**Exemple :** Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».



**3 Indépendance de deux événements**

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**4 Loi binomiale**

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est  $p$  et le schéma de Bernoulli consistant à répéter  $n$  fois de manière indépendante cette épreuve.

Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  et est notée  $\mathcal{B}(n; p)$ .

- Probabilité d'obtenir  $k$  succès :  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- Espérance de X :  $E(X) = np$
- Variance et écart-type de X :  $V(X) = np(1 - p)$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$