

Définition

Ω : l'univers, ensemble des n issues d'une expérience aléatoire.
 A : événement, sous-ensemble de l'univers Ω
 \bar{A} : événement contraire, complémentaire de A dans Ω

La loi de probabilité sur l'ensemble Ω , est la fonction p à valeur dans $[0; 1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits **indépendants** ssi :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Autres formulations avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$

$$p_A(B) = p(B) \quad \text{ou} \quad p_B(A) = p(A)$$

Conséquence : Si A et B sont indépendants alors \bar{A} et B , \bar{A} et \bar{B} le sont également. **(ROC)**

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X : on pose $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	...	p_n	1

Propriétés

Soit e_1, e_2, \dots, e_n les n événements élémentaires de Ω

- $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$
- $p(\emptyset) = 0$
- Pour tout événements A et B , on a les relations :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad \text{et} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance : $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Cas particulier : Si $E(X)$ représente un gain moyen, le jeu est équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$

Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Probabilité conditionnelle

Soit A , un événement de probabilité non nulle.

On pose : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

On lit « probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé ». On parle de **probabilité conditionnelle**

⚠ Bien interpréter les énoncés et à ne pas confondre $p(A \cap B)$ et $p_A(B)$...

Détecteur de condition : « parmi », « sachant que », « On a B . Quelle est la probabilité de A », « Si B , probabilité de A »

Partition de Ω

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une partition de Ω , alors les événements A_i sont deux à deux incompatibles et :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

Probabilité totale : pour tout événement B on a

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

Cas fréquent en terminale : partition A et \bar{A}

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)$$


La loi binomiale - Incontournable

- On reconnaît un **schéma de Bernoulli** lorsque l'on répète de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli, c'est à dire une expérience aléatoire à 2 issues : le **succès** de probabilité p et l'**échec** de probabilité $q = 1 - p$.
- Si l'on note X la variable aléatoire associée au nombre de succès sur n expériences de Bernoulli, X suit **une loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$, n et p sont appelés paramètres de la loi.

Notations compactes possibles : $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ou $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

On retient : probabilité d'obtenir exactement k succès sur n expériences :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Dans ce cas : $E(X) = np$, $V(X) = npq$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Quelques variantes fréquentes au Bac... : on suppose que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

- Au moins 1 succès : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$
- Au plus 1 succès : $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$
- Entre 30 et 45 succès : $p(30 \leq X \leq 45) = p(X \leq 45) - p(X \leq 29)$

Point culture

- Si $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est appelé « coefficient binomial ». Il peut s'écrire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \times 1$ « on lit factorielle n »

$\triangle 0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$

- Triangle de Pascal** (1623-1662)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...

- Formule de Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Culture - Formule de Bayes

Cette formule est aussi appelée « théorème de la probabilité des causes », car elle permet de renverser un conditionnement. On l'obtient en remarquant que la probabilité d'une intersection $A \cap B$ peut s'écrire soit en conditionnant A par B , soit en conditionnant B par A :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Comme par ailleurs

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

On obtient la formule : $p(B) \neq 0$

$$P_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\bar{A}}(B)p(\bar{A})}$$