Limites

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  Tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A\,;+\infty[$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ **asymptote horizontale** $y = \ell$

  Tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A\,;+\infty[$.

- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ **asymptote verticale** $x = a$

  tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e $x \in]a-\epsilon\,;\ a+\epsilon[$.

- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

  Tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e $x \in]a-\epsilon\,;\ a+\epsilon[$.

Opérations sur les limites

On peut calculer les limites par somme, produit et quotient sauf dans les 4 cas suivants. Dans ces cas, on changera la forme de la fonction ou on utilisera des limites de référence (voir fonctions exp et ln)

1) $+\infty - \infty$: On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'un produit.
2) $0 \times \infty$: On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'une somme.
3) $\dfrac{0}{0}$: On simplifiera la fonction dans le cas d'une fonction rationnelle ou on essaiera de passer par le nombre dérivé si la fonction est dérivable.
4) $\dfrac{\infty}{\infty}$: On mettra en facteur le terme prépondérant du numérateur et du dénominateur.

Théorème des gendarmes et de comparaison

f, g, et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

- **Théorème des « Gendarmes »**

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in I,\ \ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)\\ \displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

- **Théorème de comparaison**

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in I,\ \ f(x) \geqslant g(x)\\ \displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in I,\ \ f(x) \leqslant h(x)\\ \displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Limites, Continuité, Dérivabilité

Continuité

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a. La fonction f est **continue** en a si et seulement si : $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

La fonction f est **continue sur un intervalle I** si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.

⚠ f continue en a $\not\Rightarrow$ f dérivable en a

Dérivabilité

Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a. f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie en a que l'on appelle nombre dérivé de f en a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Théorème : f dérivable en a $\Rightarrow$ f contine en a

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie sur I = $[a,b]$.

- Si f **continue et strictement monotone** sur I = $[a,b]$.
- et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
- alors l'équation $f(x) = k$ admet une **unique solution** dans $\mathrm{I} = [a,b]$.

Pour l'équation $f(x) = 0$, on montrera que $f(a)f(b) < 0$.

On peut généraliser ce théorème à un intervalle ouvert borné ou non.

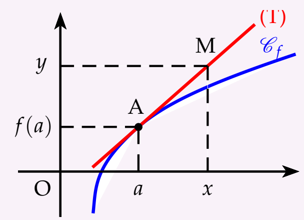
Variation et extremum

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I contenant a.

- Si $\forall x \in \mathrm{I},\ \ f'(x) > 0 \ \Rightarrow$
  f est strictement croissante sur I .
- Si $\forall x \in \mathrm{I},\ \ f'(x) < 0 \ \Rightarrow$
  f est strictement décroissante sur I
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors la fonction f admet un extremum local en a.

Tangente

Si f est dérivable en a, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point a une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ d'équation :



(T) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Limite d'une fonction composée et quelques exemples de limites

Soit deux fonctions f, g. Soient a, b et c réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g[f(x)] = c$$

Exemples de limites

1) Soit $f(x) = \ln(e^x + 2)$. Limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

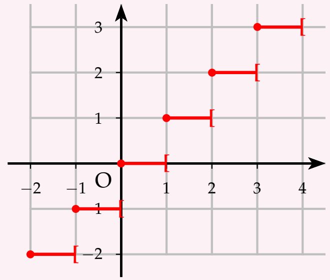
2) Soit $f(x) = \dfrac{10x}{e^x+1} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{10}{1+e^{-x}}$. Limite de f en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{10}{1+e^{-x}} = 10 \text{ car } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

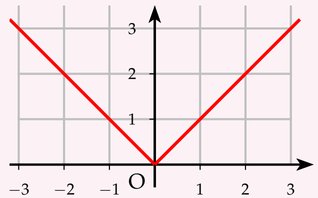
Compléments : cas de discontinuité et de non dérivabilité

- Le cas le plus fréquent de discontinuité consiste à un « saut » de la fonction autour d'une valeur comme c'est le cas par exemple de la fonction E, partie entière d'un réel x, autour de chaque valeur entière.

  Si $n \leqslant x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ alors $\mathrm{E}(x) = n$



- Un cas de non dérivabilité se rencontre lorsqu'en un point la dérivée à droite est différente de la dérivée à gauche. Sur la courbe, on observe alors un point anguleux. C'est le cas par exemple de la fonction valeur absolue en 0. Le nombre dérivé à droite vaut 1 et à gauche -1.



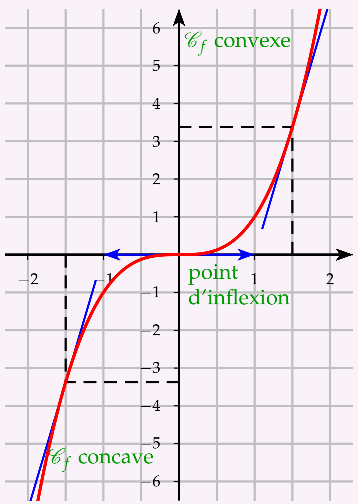
⚠ La fonction valeur absolue est continue et non dérivable en 0

Concavité et point d'inflexion

(Notion maintenant hors programme)

Lorsque f' s'annule sans changer de signe en a, f n'admet pas d'extremum en a mais un point d'inflexion. C'est le cas de la fonction cube en 0.

- Une courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur I, lorsque que ses tangentes sont en dessous de la courbe. La dérivée seconde f'' est alors positive.
- Une courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur I, lorsque que ses tangentes sont au dessus de la courbe. La dérivée seconde f'' est alors négative.
- Un point d'inflexion d'une courbe $\mathscr{C}_f$, est le point de la courbe où il y changement de concavité. La dérivée seconde f'' est alors nulle.

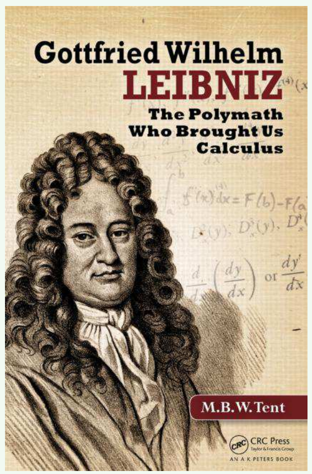


Culture

La notion de dérivabilité a mis plus de deux siècles avant d'être bien résolue.
Le problème de la dérivée s'est posé à l'époque de Newton dans le calcul de la vitesse instantanée. Newton et Leibniz calculaient alors la vitesse instantanée comme une petite variation du déplacement dx d'un point M sur un axe Ox sur un petite variation de temps dt.

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{notation différentielle}$$

Les calculs sur des petites quantités, considérées parfois comme très petites mais non nulles, parfois comme nulles, a donné le calcul infinitésimal. Ce calcul a été abandonné par manque de rigueur au profit du calcul sur les limites.



Leibniz (1646-1716)