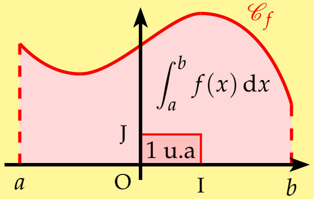
Intégrales et primitives

1 Aire sous une courbe

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. La mesure de l'aire, en u.a., sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les abscisses a et b est donné par : $\mathscr{A} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



2 Primitives

Théorème fondamental Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. La fonction F définie par : $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b]$ et $F' = f$

Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable et si $\forall x \in$ I, on a : $F'(x) = f(x)$
- Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réel.
- Il existe une unique primitive F de f sur un intervalle I telle que pour les réels x_0 et y_0, on a : $F(x_0) = y_0$
- Toute fonction **continue** sur un intervalle I **admet des primitives**.

Si F est une primitive quelconque d'une fonction f continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

3 Calcul de primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $\quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Primitve de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un réel	$\int (ku) = k \int u$
Primitive de $\quad u'u^n$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\quad \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert$
Primitive de $\quad \frac{u'}{u^n}$ $\quad n \neq 1$	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\quad \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $\quad u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $\quad u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \frac{1}{a}U(ax+b)$

Recherche d'une primitive

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

Exemple : : Soit f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(3x+6)^2}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n = 2$ dont une primitive est $\dfrac{-1}{u}$.

On écrit $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{(3x+6)^2}$.

Une primitive de f sur $]-2;+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3x+6}$

Soit g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

La fonction g est de la forme $u'u$ donc une primitive est $\dfrac{1}{2}u^2$ d'où $G(x) = \dfrac{\ln^2 x}{2}$

Calcul d'intégrale

Exemple : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$

4 Propriétés de l'intégrale

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- **relation de Chasles** $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Linéarité** $\displaystyle\int_a^b (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + b\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Sur un intervalle $[a,b]$

- Si $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Inégalité de la moyenne :**

  Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne
Si f est continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$ est égale à :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$