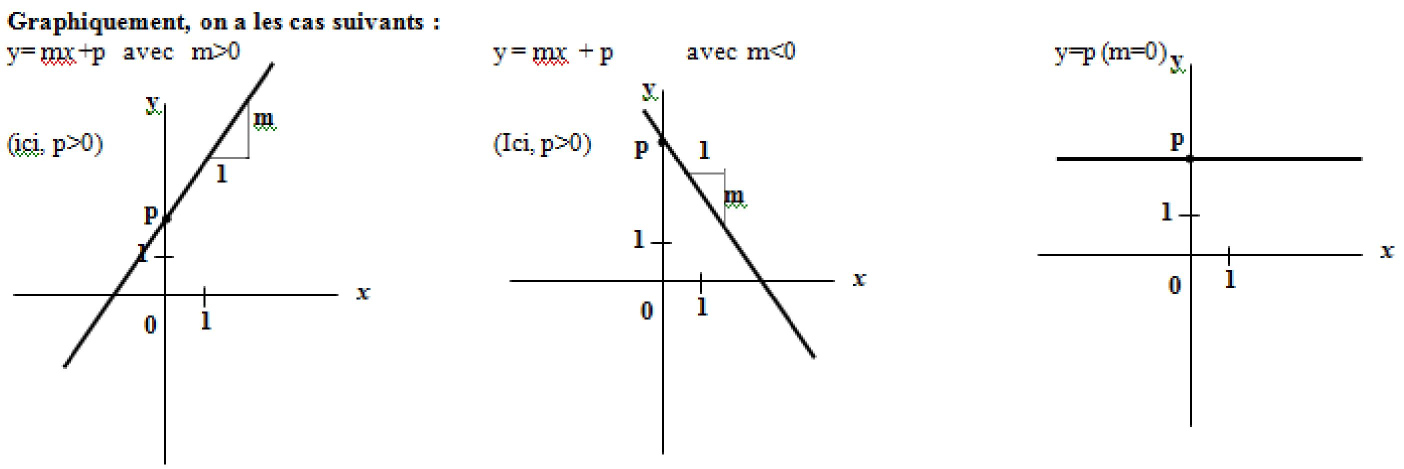
Fiche méthode : Equations de droites, vecteurs et coordonnées dans le plan | **1ère S**

1- Équations de droites

→ Une équation de droite est une égalité caractérisant tous les points d'une même droite.

→ Toute droite du plan a une équation d'inconnues x et y du type $ax+by=c$ appelée ***équation cartésienne*** de la droite (où a,b et c sont des nombres réels). Un point de coordonnées (x;y) appartient donc à la droite considérée si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de droite.
(En particulier, toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation du type $x=k$ et toute droite parallèle à l'axe des abscisses admet une équation du type $y=k$ (k étant un réel))

→ toute droite *non parallèle à l'axe des ordonnées* admet une ***équation dite « réduite »*** du type $y=mx+p$, où m et p sont des réels. (m est appelé coefficient directeur, et p ordonnée à l'origine)



→ Théorème : Si A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) sont deux points d'abscisses différentes, alors la droite (AB) admet pour coefficient directeur $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

→ Théorème : Si deux droites sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur.

Exemple de recherche d'équations réduites de droites :
A(2;3), B(7;-5) et C(7;2); déterminer les équations des droites (AB) et (BC)

Pour la droite (BC) : les deux points ont la même abscisse, donc la droite est parallèle à l'axe des ordonnées. L'équation de la droite est $x=7$ (donc tous les points d'abscisse 7 appartiennent à cette droite)

Pour la droite (AB) :

¤ recherche du coefficient directeur $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{8}{5}$

L'équation réduite de la droite est donc du type $y=-\frac{8}{5}x+p$

¤ Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, comme on sait que les coordonnées des points de la droite vérifient l'équation de la droite, on remplace les coordonnées de A(2;3) dans l'équation de droite :

$y_A=mx_A+p \Leftrightarrow 3=-\frac{8}{5}\times 2+p \Leftrightarrow p=\frac{31}{5}$

L'équation réduite de (AB) est donc $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

En multipliant par 5 et en réarrangeant, on peut dire qu'une équation cartésienne de cette droite est $8x+5y=31$

2- Coordonnées d'un vecteur/coordonnées d'un point.

→ Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les réels α et β vérifiant $\vec{u} = \alpha\ \vec{i} + \beta\ \vec{j}$

On note alors $\vec{u}\ (\alpha;\ \beta)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

→ Si A est un point du plan, O étant toujours l'origine du repère, les coordonnées du point A sont les réels notés x_A et y_A vérifiant $\overrightarrow{OA} = x_A\ \vec{i} + y_A\ \vec{j}$,et on note A (x_A ; y_A) (les coordonnées du point A sont celles du vecteur $\overrightarrow{OA}$, O étant l'origine du repère)

→ Si A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$

→ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si leurs coordonnées respectives sont égales

Exemple d'application : Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne A(3;4); B(4;-5) C(-2;-7). Déterminer les coordonnées du point M tel que $2\overrightarrow{MA} + 3\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$

On commence par déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs en fonction de celle de M(x;y)

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3-x\\ 4-y\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4-x\\ -5-y\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\ 11\end{pmatrix}$

On écrit le système traduisant l'égalité $\begin{cases} 2(3-x)+3(4-x)=5\\ 2(4-y)+3(-5-y)=11\end{cases}$. Après résolution, on trouve les coordonnées de M (2,6;-3,6)

3- Milieu d'un segment

→ Si A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B), alors les coordonnées du point I milieu de [AB] sont

I $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

4- Distance en repère orthonormal (et uniquement dans ce type de repère !)

→ Si dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on a A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B), alors

AB = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Si on a auparavant calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (α; β) alors :

AB = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Exemple d'application: Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points A(2;1) B(-4;3) C(0;5). Prouver que A et B sont sur le cercle de centre C et de rayon à préciser.

On calcule CA et CB, et si CA=CB=r alors A et B sont sur le cercle de centre C et de rayon r

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-4\\ -2\end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

On en déduit que A et B sont sur le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{5}$ unités de longueur.

5- Colinéarité

→ Définition : deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction, c'est à dire s'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

→ Théorème :Critère de colinéarité en repère .

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $ab' = ba'$ (qui équivaut à $ab' - ba' = 0$)

→ Théorème : Soient A, B, C, D quatre points distincts .

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si A, B, C sont alignés.