Intersection de deux droites et système linéaire à deux inconnues.

Index

Objectifs:

Déterminer une équation de droites passant par deux points.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Lui donner du sens.

Revoir les méthodes de résolution

1- Énoncé:

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1; 2)$, $B(1; -1)$, $C(2; 1)$, $D(-2; -2)$
Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (AB) et (CD).

Une méthode:

Soit $M(x; y)$.
Le point M appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires:
On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$.
Finalement!: $M \in (AB)$ si et seulement si ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation: $2(y-2) = -3(x+1)$ (1)

Le point M appartient à (CD) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires:
On a: $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-(-2)\\1--2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$.
Finalement!: $M \in (CD)$ si et seulement si ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation: $4(y-1) = 3(x-2)$ (2)

Comme I est le point d'intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient les deux équations (1) et (2).
Les coordonnées de I sont solutions du système: $\begin{cases}2(y-2)=-3(x+1)\\4(y-1)=3(x-2)\end{cases}$
Résolution du système: on peut remarquer qu'en ajoutant les deux équations membre-à-membre, il ne reste qu'une inconnue y, d'où, $(2y-4)+(4y-4) = (-3x-3)+(3x-6)$, soit: $6y = -1$. $y = -\frac{1}{6}$

Intersection de deux droites et système linéaire à deux inconnues.

En remplaçant y par $-\dfrac{1}{6}$ dans l'une des équations, il vient: $x = \dfrac{4}{9}$ (Faire le calcul)

Conclusion: $I(\dfrac{4}{9}\,;-\dfrac{1}{6})$

<u>Une autre méthode:</u>

Les points A et B, ainsi que les points C et D, ont des abscisses différentes. Ni la droite (AB), ni la droite (CD) ne sont parallèles à l'axe des abscisses.
On sait alors que les droites représentent des fonctions affines et on peut chercher les coefficients a et b tels que $y = ax + b$.

Équation réduite de (AB):

Comme $A \in (AB)$, on a: $2 = -a + b$

Comme $B \in (AB)$, on a: $-1 = a + b$

Résolution du système: $\begin{cases} 2=-a+b \\ -1=a+b \end{cases}$, on trouve $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$ (Faire le calcul)

L'équation réduite de (AB) est $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ (3)

Équation réduite de (CD):

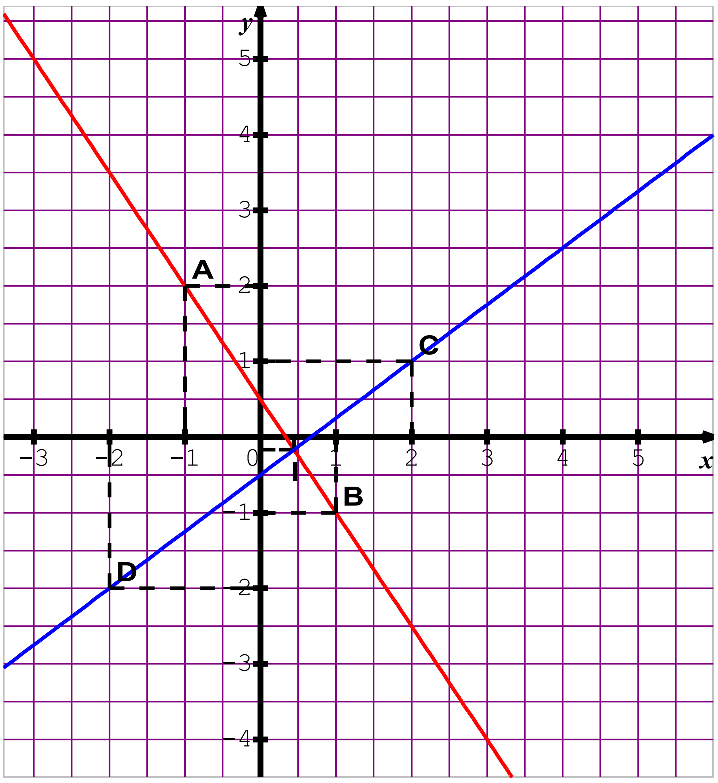
Comme $C \in (CD)$, on a: $1 = 2a + b$

Comme $D \in (CD)$, on a: $-2 = -2a + b$

Résolution du système: $\begin{cases} 1=2a+b \\ -2=-2a+b \end{cases}$, on trouve $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$ (Faire le calcul)

L'équation réduite de (CD) est $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$ (4)

Comme I est le point d'intersection des deux droites, ses coordonnées vérifient les deux équations (1) et (2).



Intersection de deux droites et système linéaire à deux inconnues.

Les coordonnées de I sont solutions du système: $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

On trouve $I(\dfrac{4}{9} ; -\dfrac{1}{6})$

Remarques:

Dans la première méthode, quelque soit la droite, on trouve une équation de la forme $ax + by + c = 0$. (Équation cartésienne d'une droite)

Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite

Lorsque $b \neq 0$, on peut mettre sous la forme $y = mx + p$ avec $m = -\dfrac{a}{b}$ (coefficient directeur de la droite)

Par exemple pour (AB), un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et l'équation (1) peut s'écrire: $-3x - 2y + 1 = 0$

On peut aussi la mettre sous la forme: $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ (Équation réduite)

2- Résumé:

Équations de droites

	Vecteur directeur	***Équation cartésienne***	***Coefficient directeur***	***Équation réduite***
Droite parallèle à l'axe des ordonnées	$\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$ax + c = 0$ avec $a \neq 0$	N'existe pas	$x = -\dfrac{c}{a}$
Droite parallèle à l'axe des abscisses	$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$by + c = 0$ avec $b \neq 0$	$m = 0$	$y = -\dfrac{c}{b}$
Droite non parallèle aux axes	$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$	$ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$	$m = -\dfrac{a}{b}$	$y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est aussi un vecteur directeur de cette droite.

Système à deux inconnues.

Toute équation de la forme $ax + by = c$ où $(a; b) \neq (0; 0)$ se représente par une droite.

Ainsi, un système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, est représenté par deux droites D_1 et D_2.

Trois cas peuvent apparaître:

1) Les droites D_1 et D_2 sont strictement parallèles. Le système n'a aucune solution.

2) Les droites D_1 et D_2 sont confondues. Le système a une infinité de solutions.

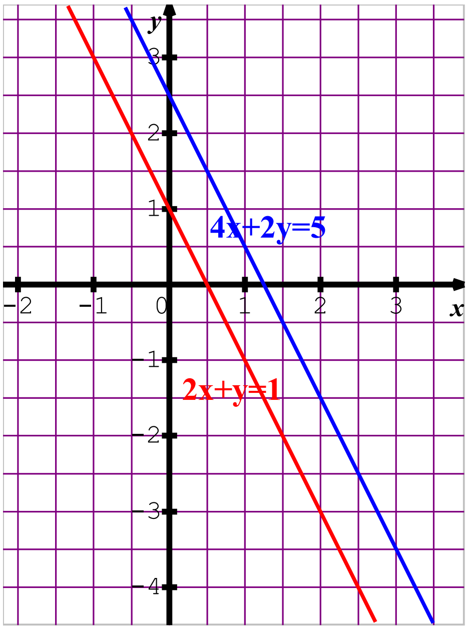
Dans ces deux cas, les vecteurs $\vec{u_1}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que leurs coordonnées

forment un tableau de proportionnalité. $ab' = a'b$.
De plus dans le deuxième cas, les suites (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnelles

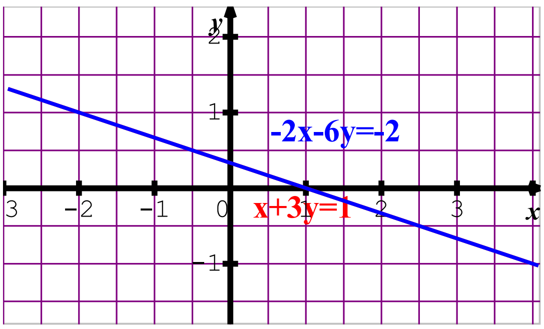
3) Les droites D_1 et D_2 sont sécantes. Le système a une et une seule solution représentée par le point d'intersection.
Dans ce cas, les vecteurs $\vec{u_1} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. $ab' \neq a'b$.

Illustrations

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=5 \end{cases}$ Comme $2\times2 = 4\times1$, et que, $1\times2 \neq 5$, le système n'a aucune solution.



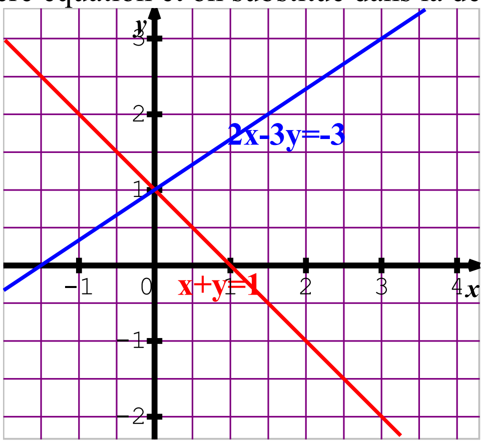
b) $\begin{cases} x+3y=1 \\ -2x-6y=-2 \end{cases}$. En multipliant la suite (1; 3; 1) par (–2), on trouve (–2; –6; –2). Le système a une infinité de solutions représentées par la droite d'équation réduite: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$



c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$. Comme $1\times(-3) \neq 2\times1$, le système a une et une seule solution.

Intersection de deux droites et système linéaire à deux inconnues.

Par exemple, on tire $y = 1 - x$ de la première équation et on substitue dans la deuxième.



$2x - 3(1 - x) = -3$, soit: $5x = 0$. On trouve $x = 0$, puis, $y = 1$. Le couple solution est (0; 1)

3- Deux méthodes usuelles de résolution

3- 1- Méthode par substitution

Objectif:

Comme son nom l'indique, on substitue ....

mais on substitue qui à quoi? et pourquoi?

Pourquoi? En faisant la bonne substitution, on obtient une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait donc résoudre.

... qui à quoi? On remplace l'une des inconnues par son expression en fonction de l'autre inconnue.

Un exemple:

Résoudre le système: $(\Sigma)\ \begin{cases} 2x+3y=-1 & (L1) \\ 5x-2y=2 & (L2) \end{cases}$ où $(x; y)$ est le couple d'inconnues.

À partir de $(L1)$ on exprime y en fonction de x, soit: $y = \dfrac{-1-2x}{3}$

et dans $(L2)$, on substitue à y l'expression qui lui est égale, soit: $5x - 2\times\dfrac{-1-2x}{3} = 2$,

La ligne $(L2)$ devient après mise au même dénominateur, réduction, réorganisation, ...

$15x + 2 + 4x = 6$, d'où, $x = \dfrac{4}{19}$

puis, en reprenant $y = \dfrac{-1-2x}{3}$, on obtient: $y = \dfrac{-1-2\times\frac{4}{19}}{3} = \dfrac{-19-8}{19\times 3} = -\dfrac{9}{19}$

On n'oublie pas de vérifier et on conclut:

Le système (Σ) a pour couple solution $\left(\dfrac{4}{19}; -\dfrac{9}{19}\right)$

Intersection de deux droites et système linéaire à deux inconnues.

3-2- Méthode par combinaison linéaire.

objectif:

Comme son nom l'indique, on combine les lignes ....

mais, de quelle façon? et pourquoi?

Pourquoi? En faisant la bonne combinaison, on annule le coefficient d'une inconnue afin d'obtenir une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait donc résoudre.

De quelle façon? On multiplie chaque ligne par des coefficients qui permettent cette action (annuler ...) en faisant la somme des nouvelles lignes.

Un exemple:

Reprenons le système de l'exemple précédent

Résoudre le système: (Σ) $\begin{cases} 2x+3y=-1 & (L1) \\ 5x-2y=2 & (L2) \end{cases}$ où $(x; y)$ est le couple d'inconnues.

On va choisir la combinaison linéaire suivante: $2\times(L1) + 3\times(L2)$ afin d'annuler le coefficient de y.

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=-2 \\ 15x-6y=6 \end{cases}$

En ajoutant membre-à-membre, il vient: $19x = 4$, d'où, $x = \dfrac{4}{19}$.

On choisit maintenant la combinaison linéaire suivante: $5\times(L1) - 2\times(L2)$ afin d'annuler le coefficient de x.

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+15y=-5 \\ 10x-4y=4 \end{cases}$

En retranchant membre-à-membre, il vient: $19y = -9$, d'où, $y = -\dfrac{9}{19}$

On n'oublie pas de vérifier et on conclut:

Le système (Σ) a pour couple solution $\left(\dfrac{4}{19};-\dfrac{9}{19}\right)$