Répétition d'expériences identiques et indépendantes

I) Situation étudiée

On considère une expérience aléatoire possédant un ensemble fini Ω d'issues.
On répète plusieurs fois cette expérience dans les mêmes conditions et de telle façon que les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre (indépendance)

Exemples

1) On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.

2) On lance une pièce de monnaie équilibrée 3 fois et on s'intéresse au nombre de fois où la pièce retombe sur pile.

3) On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1, qu'elle atteigne le 5 est 0,4 et qu'elle atteigne le 1 est 0,5.

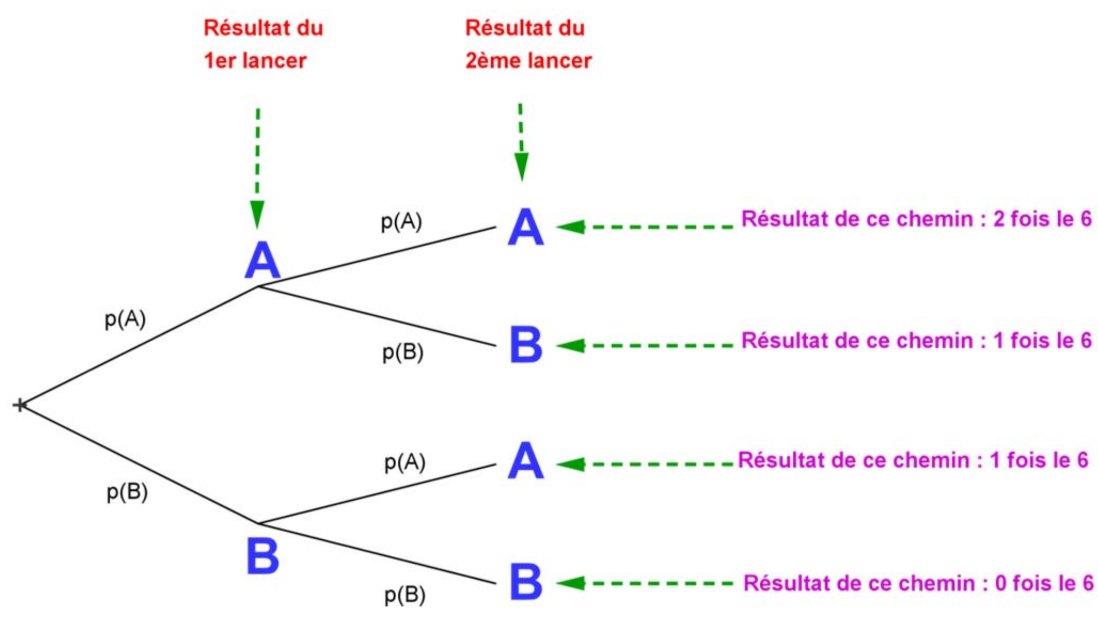
4) On s'intéresse aux familles ayant deux enfants.

II) Représentation

Pour représenter une telle répétition d'expériences on construit un arbre pondéré. Sur chaque branche on indique la probabilité de l'issue correspondante.

Exemple :

Soit une expérience aléatoire possédant $\Omega = \{ A ; B \}$ comme ensemble d'issues. On répète deux fois cette expérience. On obtient ainsi l'arbre suivant :



III) Modélisation

Dans le cas d'une répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes représentée par un arbre pondéré.

• La probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées sur les branches de ce chemin

• La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins est obtenue en ajoutant les probabilités des événements correspondants à chaque chemin puisque ceux-ci sont incompatibles.

Exemples :

Sur l'exemple précédent :

• Probabilité de l'événement « AA » : p(A) × p(A)

• Probabilité de l'événement « BA » : p(B) × p(A)

• Probabilité de l'événement « les deux issues sont différentes » (soit AB ou BA) :
p(A) × p(B) + p(B) × p(A)

• Probabilité de l'événement « les deux issues sont identiques » (soit AA ou BB) :
p(A) × p(A) + p(B) × p(B)

IV) Exemples

Reprenons les exemples du début de la fiche

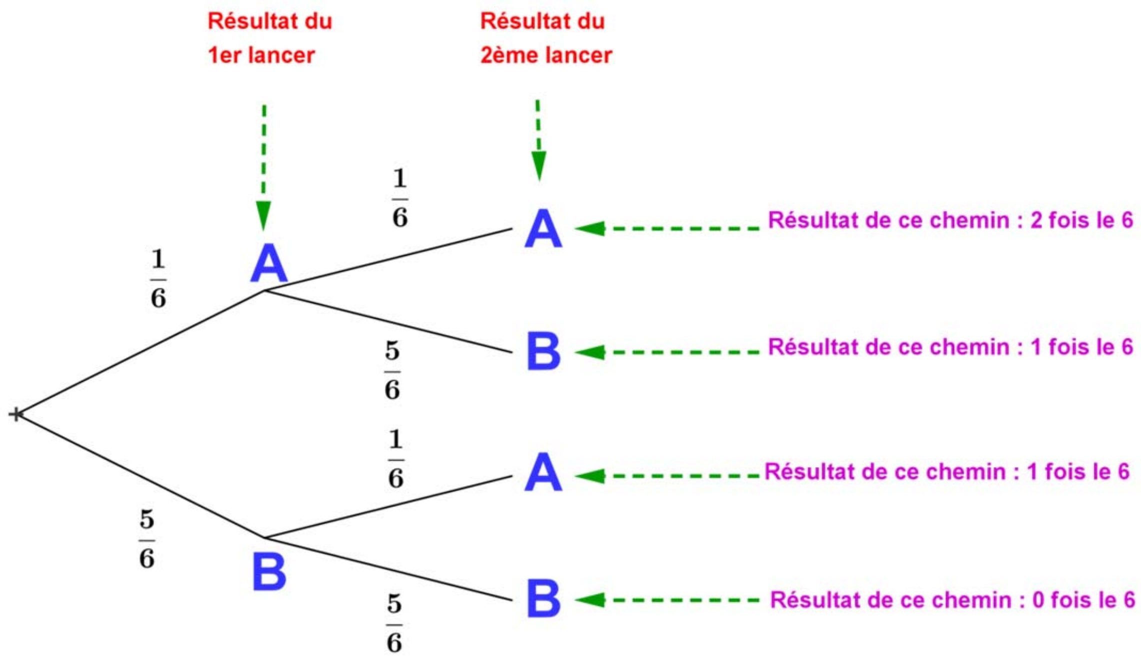
1) Deux lancers de dé

On lance 2 fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre de 6 obtenus.

Appelons A l'issue « on a obtenu un 6 » p(A) = $\frac{1}{6}$ et B = $\overline{A}$ « on n'a pas obtenu un 6»

On a p(B) = $\frac{5}{6}$

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Ainsi la loi de probabilité correspondant au nombre de 6 obtenus est :

P(On a obtenu 2 fois le 6) = $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

P(On a obtenu 1 fois le 6) = $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$

P(On a obtenu 0 fois le 6) = $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

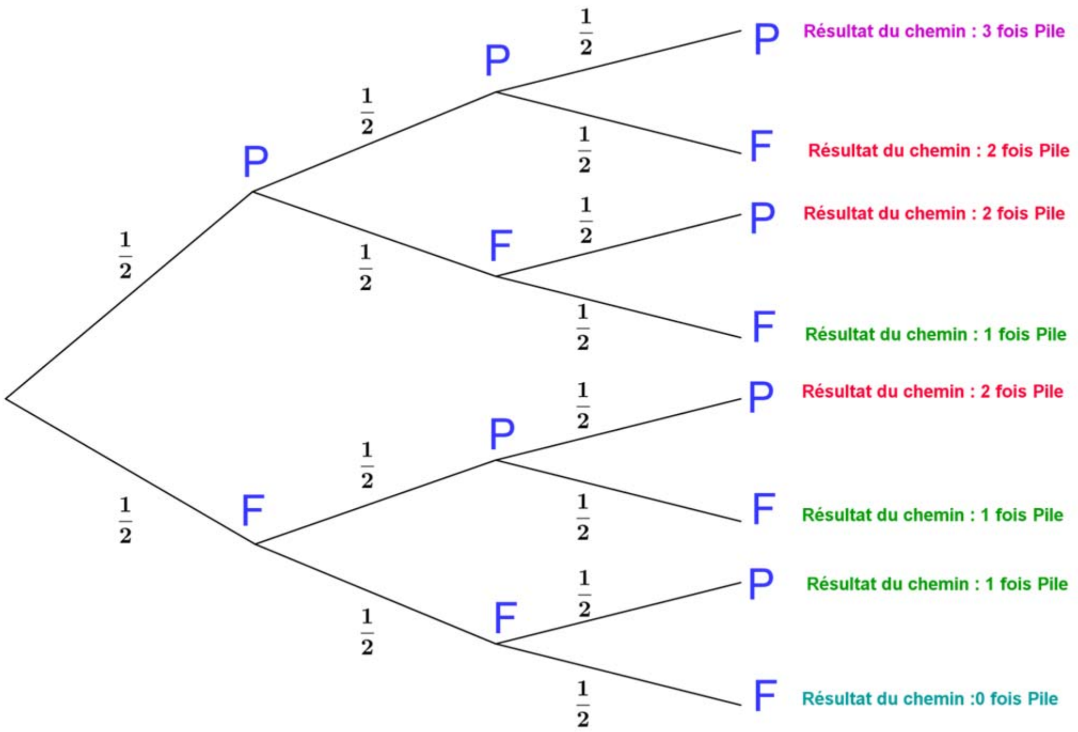
2) Trois lancers de pièces

On lance une pièce de monnaie équilibrée 3 fois et on s'intéresse au nombre de fois où la pièce retombe sur pile.

Appelons P l'événement la pièce retombe sur Pile et F la pièce retombe sur Face. On a

P(P) = P(F) = $\frac{1}{2}$

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Ainsi la loi de probabilité correspondant au nombre de fois où on a obtenu PILE est :

P(On a obtenu 3 fois PILE) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

P(On a obtenu 2 fois PILE) = $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

P(On a obtenu 1 fois PILE) = $3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

P(On a obtenu 0 fois PILE) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

3) Deux lancers de flèches

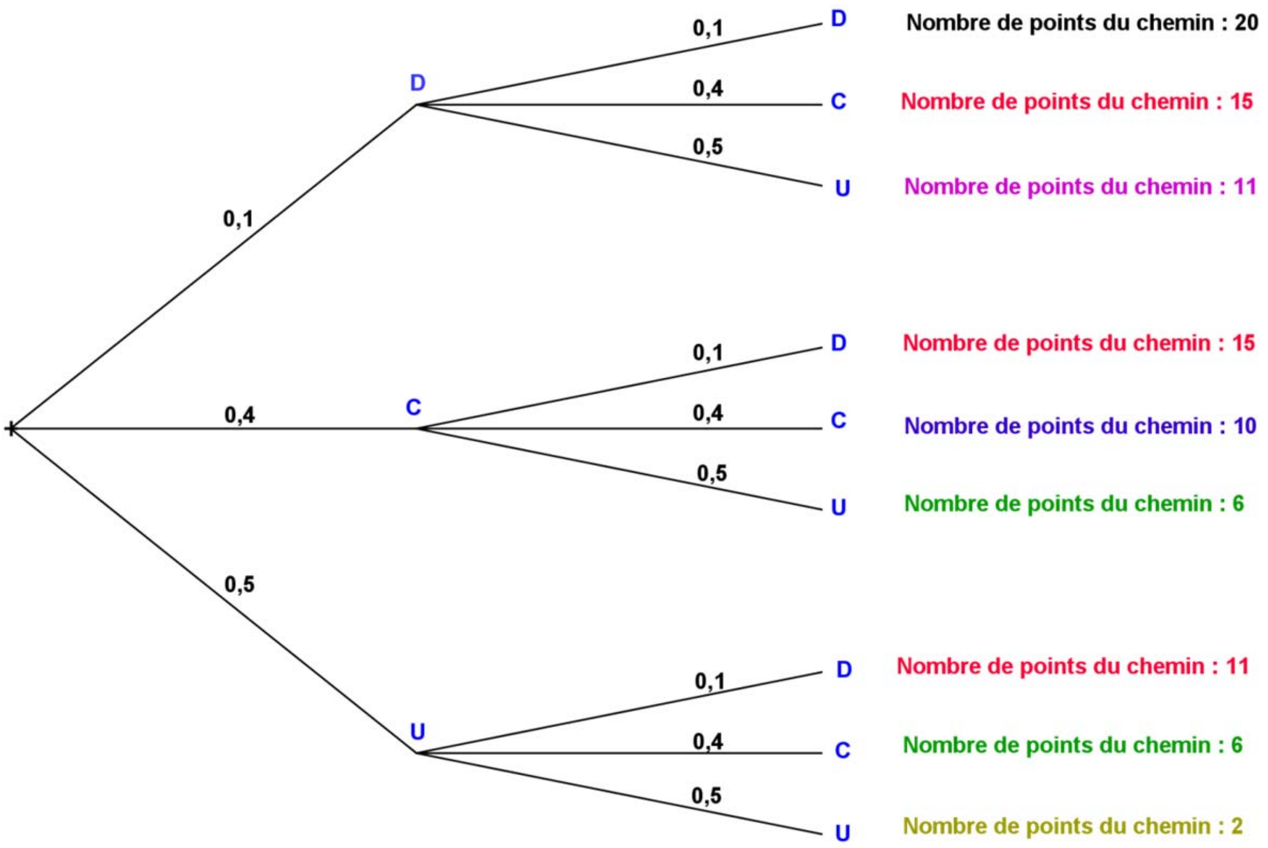
On lance 2 flèches sur une cible comportant trois secteurs numérotés 10 ; 5 ; 1 et on s'intéresse au nombre de points obtenus sachant que la probabilité que la flèche atteigne le 10 est 0,1 , qu'elle atteigne le 5 est 0,4 et qu'elle atteigne le 1 est 0,5.

Appelons D l'événement la flèche atteint le 10 : P(D) = 0,1

C l'événement la flèche atteint le 5 : P(C) = 0,4

U l'événement la flèche atteint le 1: P(U) = 0,5

Représentons la situation par un arbre pondéré :



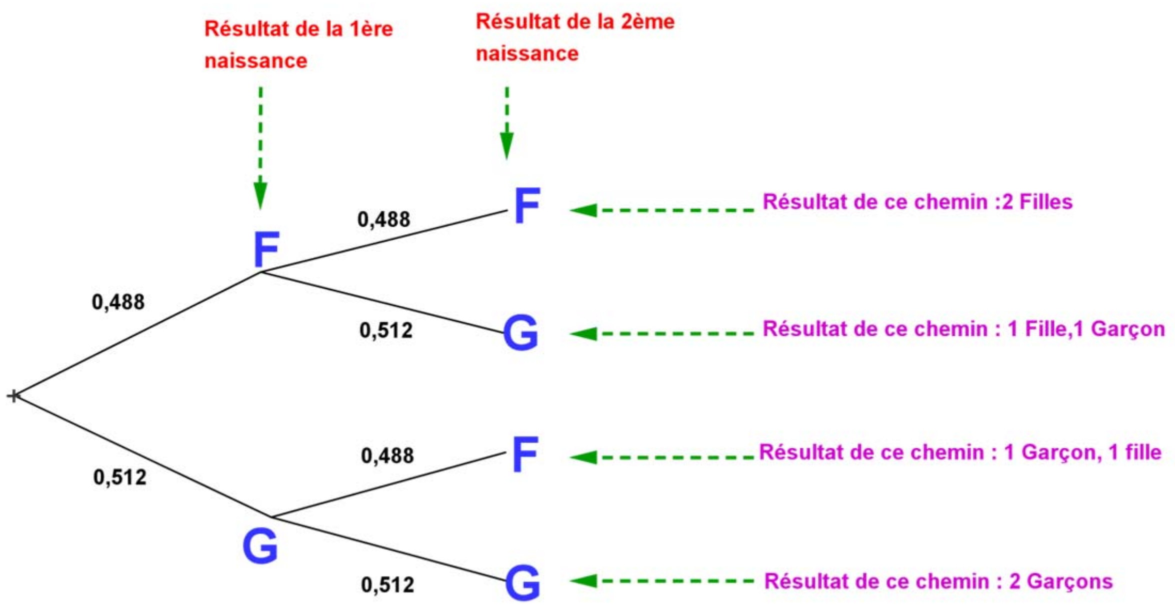
Ainsi on obtient la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de points obtenus :

Nombre de points obtenus x_i	**20**	**15**	**11**	**10**	**6**	**2**
Probabilité p_i=P(X= x_i)	**0,1×0,1 = 0,01**	**2×0,1×0,4 =0,08**	**2×0,1×0,5 =0,1**	**0,4×0,4 =0,16**	**2×0,4×0,5 =0,4**	**0,5×0,5 =0,25**

4) Familles de deux enfants

On s'intéresse aux familles ayant 2 enfants. On appelle F l'événement « naissance d'une fille » et G « naissance d'un garçon ». On sait que en France p(F) ≈ 0 ,488 et que p(G) = 1 – P(F) ≈ 0,512

Représentons la situation par un arbre pondéré :



Ainsi on a :

La probabilité d'avoir 2 Filles : $0{,}488 \times 0{,}488 \approx 0{,}238$

La probabilité d'avoir 2 enfants de sexes différents : $0{,}48 \times 0{,}512 + 0{,}512 \times 0{,}488 \approx 0{,}5$

La probabilité d'avoir 2 enfants de même sexe : $0{,}488 \times 0{,}488 + 0{,}512 \times 0{,}512 \approx 0{,}5$