Suites géométriques

I) Définition

Soit n_0 est un nombre entier naturel.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite. On dit qu'elle est géométrique si, partant du

TERME INITIAL u_{n_0}, pour passer d'un terme au suivant, on

MULTIPLIE toujours par le même nombre appelé RAISON

Exemple: Une voiture, achetée neuve coûtait 20 000 € (en 2008), perd chaque année 20%
de sa valeur.

• Au bout d'un an : la voiture coûtait 20% moins cher :
20 000 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 20 000 × **0,8** = 16 000. En 2009 la voiture coûtera 16 000 €.

• Au bout de deux ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur : 16 000 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 16 000 × **0,8** = 12 800. En 2010 la voiture coûtait 12 800 €.

• Au bout de trois ans la voiture a perdu encore 20% de sa valeur : 12 800 × (1 - $\frac{20}{100}$) = 12 800 × **0,8** = 10 240. En 2011 la voiture coûtait 10 240.€.

Et ainsi de suite … on multiplie la valeur de la voiture de l'année précédente par 0,8 pour obtenir celle de l'année suivante.

Soit u_0 la valeur de la voiture en 2008. u_0 = 20 000

u_1 est la valeur de la voiture au bout d'un an c'est-à-dire u_1 = u_0 × **0,8** = 16 000

u_2 est la valeur de la voiture au bout de deux ans c'est-à-dire u_2 = u_1 × **0,8** = 12 800

Soit u_n la valeur de la voiture au bout de n années, u_n = u_{n-1} × **0,8**

Cette suite est géométrique : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre (dans notre cas 0,8)

Algorithme : dans cet algorithme $\boldsymbol{n_0 = 0}$

Cet algorithme permet d'obtenir les premiers termes d'une suite géométrique.

- Déclaration des variables :
  i , n entiers ;
  u , q réels ;
- Instructions d'entrée :
  Entrer la valeur de l'entier n ; {n est le rang du dernier terme que l'on veut obtenir}
  Entrer la valeur du réel u et celle du réel q ; {u est le terme initial, q la raison }
- Traitement des données :
  Pour i variant de 0 à n
    Afficher u ;
    Affecter à u la valeur de u×q ;
  Fin de la boucle Pour ;
- Fin de l'algorithme.

{Les affichages successifs donnent les valeurs des termes de la suite}

II) Les deux formules de calculs de termes.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de premier terme u_{n_0} et de raison q

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$, une suite, et n un entier naturel supérieur ou égal à n_0,.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même valeur q appelée raison:

$$u_{n+1} = u_n \times \mathrm{q}$$

On peut obtenir directement la valeur de u_n à partir de celle de u_{n_0} en appliquant la formule suivante :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$$

Cas particulier où le 1er rang est 0 : $u_n = u_0 \times q^n$

Remarques:

La première formule s'appelle **formule de récurrence**. Elle traduit exactement la définition de suite géométrique.

En revanche, elle est incommode dans le cas où il s'agit de calculer un terme de rang élevé.

Par exemple, pour calculer u_{28} à partir de u_0, il faut effectuer 28 multiplications par le nombre r .

C'est inefficace !

Il convient dans ce cas d'employer la seconde formule, appelée **formule directe.**

Les deux formules sont équivalentes : toute suite qui, pour tout entier n, vérifie l'une des formules vérifie l'autre.

Exemples :

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par: $u_{n+1}= u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_1; u_2 ; u_3 puis u_{15}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1}= u_n \times 3$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 3 , la suite est donc géométrique de raison 3 et de 1er terme 2

2) $u_1 = u_0 \times 3 = 2 \times 3 = 6$ **$u_1 = 6$**

$u_2 = u_1 \times 3 = 6 \times 3 = 18$ **$u_2 = 18$**

$u_3 = u_2 \times 3 = 18 \times 3 = 54$ **$u_3 = 54$**

On applique la 2ème formule :

$u_{15} = u_0 \times 3^{15}$

$u_{15} = 2 \times 3^{15}$ **$u_{15} = 28\ 697\ 814$**

3) $u_n = u_0 \times 3^n$ **$u_n = 2 \times 3^n$**

Exemple 2 : Soit la suite (u_n) définie par:

$\boldsymbol{u_{n+1}} = \dfrac{u_n}{2}$ et $u_1 = 3$

1) Justifier que cette suite est géométrique

2) Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 puis u_{30}

3) Calculer u_n en fonction de n

Réponse :

1) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1}{2}$. On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par $\dfrac{1}{2}$ .La suite est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme 3 .

2) $u_2 = \dfrac{u_1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ **$u_2 = 1{,}5$**

$u_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{1{,}5}{2} = 0{,}75$ **$u_3 = 0{,}75$**

$u_4 = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{0{,}75}{2} = 0{,}75$ **$u_4 = 0{,}375$**

On applique la 2ème formule :

$u_{30} = u_1 \times (\frac{1}{2})^{30-1}$

le 1er terme de la suite est u_1 au lieu de u_0
La suite a donc un terme de moins donc
la formule est $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_{30} = 3 \times (\frac{1}{2})^{29}$ **$u_{30} = \dfrac{3}{2^{29}}$**

3) $u_n = u_1 \times q^{(n-1)}$

$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$ $u_n = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2^{n-1}}}$

Exemple 3 : Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_3 = 4$ et $u_6 = 32$.
Déterminer la raison et le 1er terme u_0 de u

Réponse :

u est une suite géométrique de raison q. Pour tous entiers m et n :

$u_n = u_m \times q^{(\mathrm{n-m})}$

$u_6 = u_3 \times q^{(6-3)}$

$32 = 4 \times q^3$ donc q^3 **=** 8. Donc $q = 2$

Son 1er terme est u_0 : $u_3 = u_0 \times q^3$

on obtient : $4 = u_0 \times 2^3$ Donc $u_0 = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$**.**

La suite géométrique u a pour raison 2 et a pour 1er terme $u_0 = \frac{1}{2}$

Exemple 4 : Soit la suite (u_n) définie par: $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n}$

1.Montrer que pour tout entier n , $u_n = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Montrer que u est une suite géométrique. Préciser sa raison et son 1er terme U_0

Réponse :

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^{n+1}}{4^n} = \frac{5 \times 5^n}{4^n} = 5 \times \frac{5^n}{4^n} = 5 \times (\frac{5}{4})^n$

2.Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^{n+1} = 5 \times (\frac{5}{4})^n \times \frac{5}{4} = u_n \times \frac{5}{4}$

La suite est donc géométrique de raison $\frac{5}{4}$. $u_0 = \frac{5^1}{4^0} = \frac{5}{1}$

Son 1er terme est u_0 = 5

Démonstration de l'équivalence des deux formules:

• Cas particulier où le premier rang est 0 :

- Tout d'abord montrons que si $u_n = u_0 \times q^n$ **alors** $u_{n+1} = u_n \times q$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$ donc $u_{n+1} = u_0 \times q^n \times q = q \times u_n$, donc $u_{n+1} = u_n \times q$.

- **Montrons maintenant la réciproque qui est** :

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle qu'il existe un réel q non nul, tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$ alors $u_n = u_0 \times q^n$

$(u_0 \neq 0)$ et (q $\neq 0)$ ainsi aucun u_n n'est nul.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_0 \times q \\ u_2 = u_1 \times q \\ u_3 = u_2 \times q \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} = u_{n-2} \times q \\ u_n = u_{n-1} \times q \end{array}\right\} \text{n lignes}$$

en multipliant membre à membre ces n égalités ci-contre on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = u_0 \times q \times u_1 \times q \ldots \times u_{n-1} \times q$$

On constate que les termes se simplifient deux à deux sauf deux (u_0 et u_n) et on obtient pour tout entier naturel n:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

• Cas général où le premier rang est n_0 :

Si la suite (u_n) est définie à partir du rang n_0, alors on étudie la suite (v_n) définie par :

$v_n = u_{n+n_0}$ dans ce cas $v_0 = u_{n_0}$ ainsi on se ramène au cas précédent.

III) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété:

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q ($q > 0$) et de 1er terme u_{n_0} :

	$0 < q < 1$	**$q > 1$**	**$q = 1$**
$u_{n_0} > 0$	**(u_n) est strictement décroissante.**	**(u_n) est strictement croissante.**	**(u_n) est constante.**
$u_{n_0} < 0$	**(u_n) est strictement croissante.**	**(u_n) est strictement décroissante.**	**(u_n) est constante.**
$u_{n_0} = 0$	**(u_n) est une suite nulle**		

Démonstration:

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison q ($q > 0$) et de 1er terme u_{n_0} alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n_0} \times q^n$

$u_{n+1} - u_n = u_{n_0} \times q^{n+1} - u_{n_0} \times q^n = u_{n_0} \times q^n \ (q - 1)$

1er cas : $u_{n_0} > 0$

• **Si $0 < q < 1$** alors $q - 1 < 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n \ (q - 1) < 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ on a alors :
$u_{n+1} < u_n$. **La suite La suite (u_n) est donc strictement décroissante.**

• **si q >1** alors $q - 1 > 0$, , pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n \ (q - 1) > 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ on a alors :
$u_{n+1} > u_n$. **La suite (u_n) est donc strictement croissante.**

• **si $q = 1$** alors $q - 1 = 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ on a alors :
$u_{n+1} = u_n$. **La suite (u_n) est donc constante.**

2ème cas : $u_{n_0} < 0$

• **Si $0 < q < 1$** alors $q - 1 < 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n \ (q - 1) > 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$ on a alors :
$u_{n+1} > u_n$. **La suite (u_n) est donc strictement croissante**.

• si q >1 alors $q - 1 > 0$, , pour tout entier naturel n, $u_{n_0} \times q^n \ (q - 1) < 0$

par conséquent , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$ on a alors :
$u_{n+1} < u_n$. **La suite (u_n) est donc strictement décroissante**.

• si $q = 1$ alors $q - 1 = 0$, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ on a alors :
$u_{n+1} = u_n$. **La suite (u_n) est donc constante.**

3ème cas : $u_{n_0} = 0$ **pour tout entier naturel n,** $u_n = u_{n_0} \times q^n$ **= 0. La suite est donc nulle.**

Exemples:

Exemple 1:

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1}= u_n \times 3$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1}= u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 > 1

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exemple 2:

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1}= u_n \times 3$ et $u_0 = -2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1}= u_n \times 3$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3 > 1 mais $u_0 = -2 < 0$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 3 :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$u_{n+1}= u_n \times \frac{1}{2}$ et $u_0 = 2$

Réponse :

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $u_{n+1}= u_n \times \frac{1}{2}$

la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

IV) Somme des puissances successives d'un nombre réel

1) Propriété:

Pour tout entier naturel non nul et $q \neq 1$:

$$\mathbf{1 + q + q^2 .... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Exemple: Calculer S = 1 +10 + 10² + ...+ $\mathbf{10^5}$

S = 1 +10 + 10² + ...+ $\mathbf{10^5} = \frac{1-10^{5+1}}{1-10} = \frac{1-10^6}{1-10} = \frac{1-1\,000\,000}{1-10} = \frac{-999\,999}{-9} = \mathbf{111\,111}$

S =111 111

2) Démonstration:

$S = 1 + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + ...+ q^n$

$\boldsymbol{q}S = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + q^4 + ...+ q^{n+1}$

$\boldsymbol{q}S - S = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + q^4 + ...+ q^{n+1} - (1 + \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + ...+ q^n) =$

$= \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^2 + q^3 + q^4 + ...+ q^{n+1} - 1 - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^2 - q^3 - ....- q^n$

$= -1 + \underbrace{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q})} + \underbrace{(\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^2)} + \underbrace{(q^3 - q^3)} + ...+ \underbrace{(q^n - q^n)} + q^{n+1}$

$= -1 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + ...+ \quad 0 \quad + q^{n+1}$

On obtient donc :

$qS - S = -1 + q^{n+1}$ donc :

$S(q-1) = -1 + q^{n+1}$

On obtient donc: $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

D'où la formule : $\mathbf{1 + q + q^2 + q^3 + ...+ q^n} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

V) Exemple de graphique

Exemples :

Si $r = 1$ ou si $u_0 = 0$, alors les points du graphiques sont alignés, sur la droite d'équation $y = u_0$ (**voir points rouges** ci-dessous pour $u_0 = 0$ et **les points bleus** pour $r = 1$ et $u_0 = 3$).
Les points verts ci-dessous sont les premiers points de la représentation graphique de la suite géométrique de raison $1{,}2$ et de terme initial $u_0 = 0{,}5$.