Angles orientés de deux vecteurs

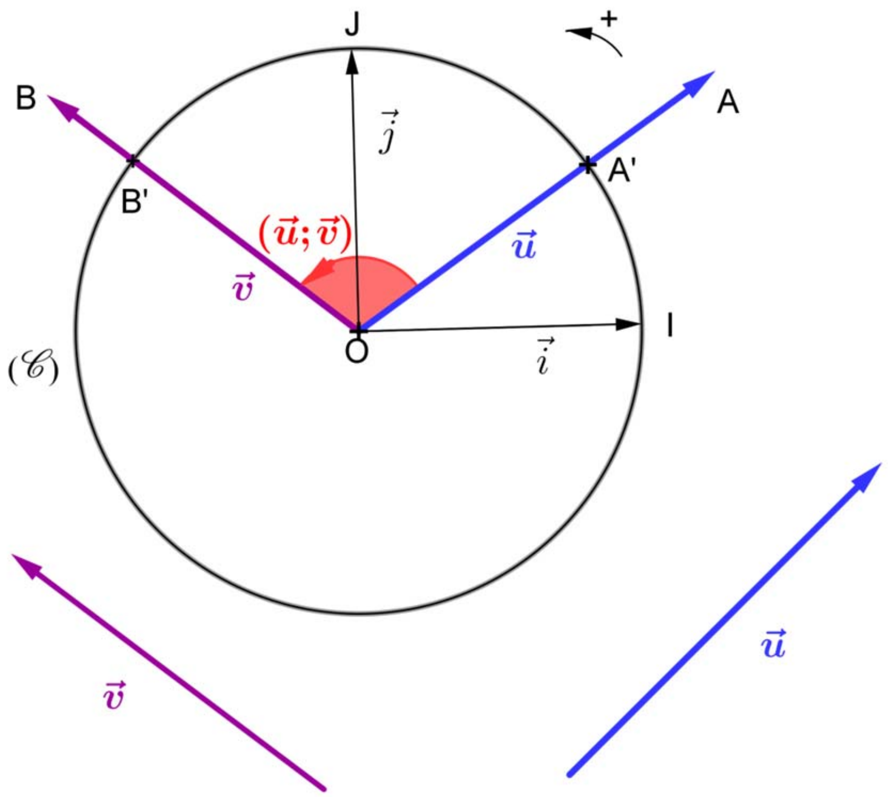
I) Définition :

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

• $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont deux représentants de ces vecteurs.

• A' et B' sont les points d'intersections respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec le cercle trigonométrique ($\mathcal{C}$).

La mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ sont les mesures en radian de $(\overrightarrow{OA'}\ ;\ \overrightarrow{OB'})$



II) Propriétés des angles orientés

1) Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si , et seulement si, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire si , et seulement si, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \pi$

2) Relation de Chasles

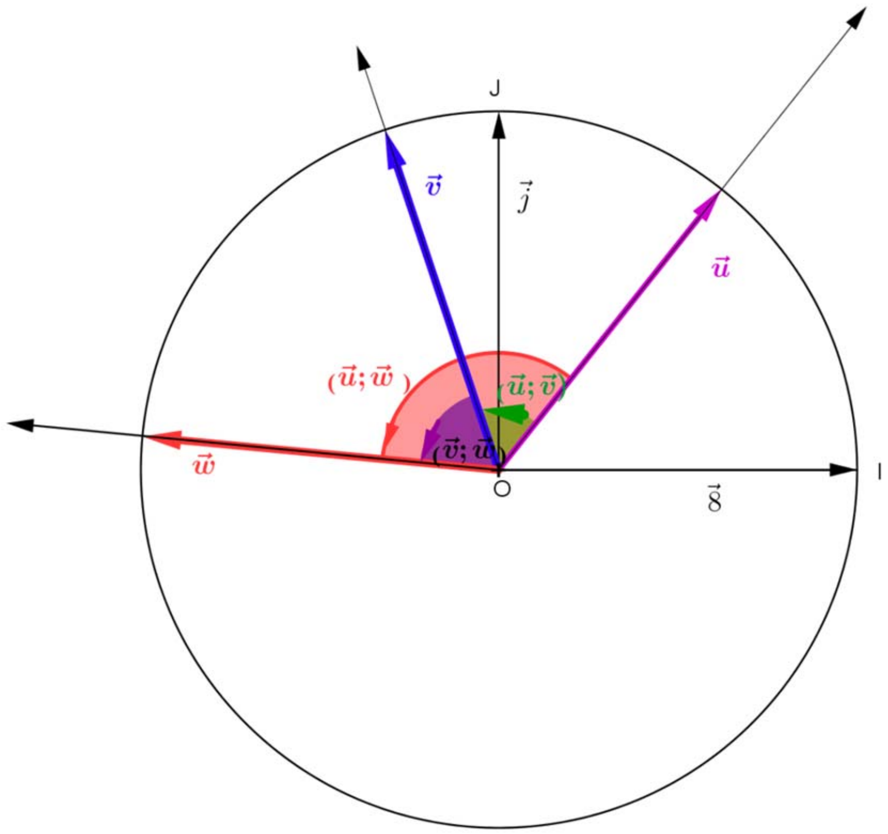
• **Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:**

$(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ \vec{w}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{w}) + 2\,\pi \times k \quad (k \in \mathbb{Z})$

• **Soit O, M, N et P quatre points du plan tels que O ≠ M ; O ≠ N et O ≠ P**

On a la relation suivante :

$(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}\ ;\ \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OP}) + 2\,\pi \times k \quad (k \in \mathbb{Z})$



3) Autres propriétés

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$:

• $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \ \ (2\,\pi)$

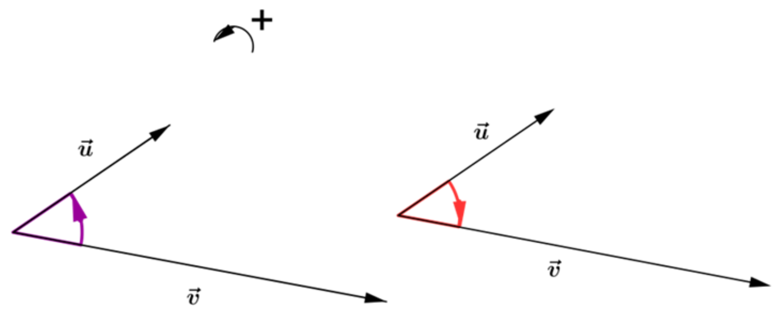
• $(\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \ \ (2\,\pi)$

• $(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \pi + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \ \ (2\,\pi)$

• $(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \ \ (2\,\pi)$

Démonstrations

•



Le vecteur $(\vec{v}\ ;\ \vec{u})$ est dans le sens contraire du vecteur $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$. L'un est dans le sens direct l'autre dans le sens indirect : d'où l'égalité : $(\vec{v}\ ;\ \vec{u}) = -(\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ \ (2\pi)$

• En utilisant la relation de Chasles :

$(\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ -\vec{v})\quad (2\pi)$

or $(\vec{v}\ ;\ -\vec{v}) = \pi\quad (2\pi)$ car ces deux vecteurs sont colinéaires de sens contraires

donc $\boldsymbol{(\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\quad (2\pi)}$

• En utilisant la relation de Chasles :

$(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) + (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\quad (2\pi)$

or $(-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) = \pi\quad (2\pi)$ car ces deux vecteurs sont colinéaires de sens contraires

donc $\boldsymbol{(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \pi + (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\quad (2\pi)}$

• En utilisant la relation de Chasles :

$(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ -\vec{v})\quad (2\pi)$

Or $(\vec{v}\ ;\ -\vec{v}) = \pi\ \ (2\pi)$ et $(-\vec{u}\ ;\ \vec{u}) = \pi\quad (2\pi)$

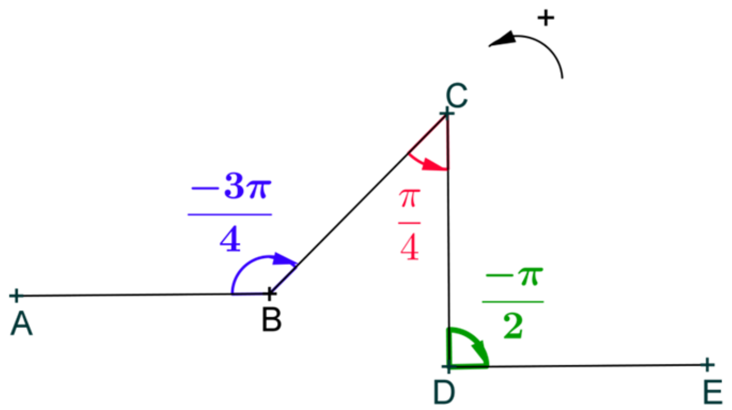
donc $(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\quad (2\pi)$

$(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + 2\pi\quad (2\pi)$

On obtient donc : $\boldsymbol{(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + 2\pi}$

III) Exemples

Exemple 1 : Le plan est orienté. **Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles** ? Justifier votre réponse.



Solution:

Utilisons la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{DE}) \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DE}) \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = \pi + \frac{-3\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{-\pi}{2} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 3\pi + \frac{-3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{2} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 3\pi + \frac{-3\pi+\pi-2\pi}{4} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 3\pi + \frac{-4\pi}{4} \quad (2\pi)$

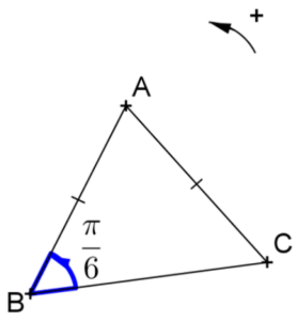
$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 3\pi + \frac{-4\pi}{4} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 2\pi \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{DE}) = 0 \quad (2\pi)$

Les droites (AB) et (DE) sont donc parallèles.

Exemple 2 : Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$



Solution:

$(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = -\ (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = -\ \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = -\ \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)$ car le triangle ABC est isocèle de sommet principal A

Utilisons la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{AC}) \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi - \frac{\pi}{6} + \pi \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = 3\pi - \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$