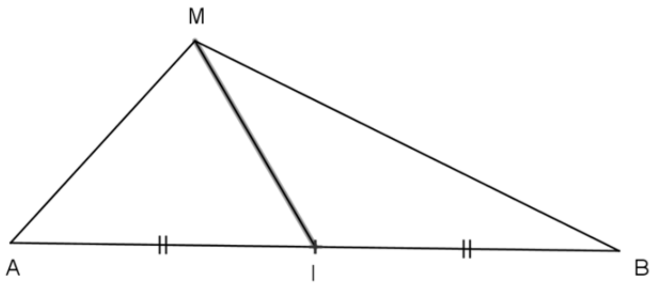
Application du produit scalaire: longueurs et angles

I) Théorème de la médiane

1) Théorème

A et B sont deux points et I est le milieu du segment [AB].Pour tout point M,
$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$



2) Démonstration du théorème

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$MA^2 + MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$

Comme I est le milieu de [AB] alors :

- $IA = IB = \frac{1}{2}AB$, donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$.
- et $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ alors :

$MA^2 + MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}.\underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})} + \underbrace{\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2}$

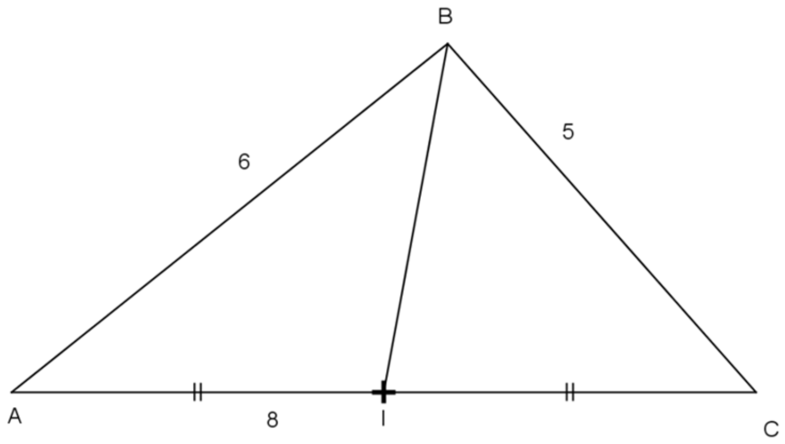
$MA^2 + MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI}\ .\ \vec{0} + 2 \times \frac{1}{4}AB^2$.

$\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}AB^2}$.

3) Exemple

ABC est le triangle tel que : AB = 6 cm AC = 5 cm et BC = 5 cm. I est le milieu de [AC]
Quelle est la mesure de la médiane [BI] ?

Réponse :



I est le milieu du segment [AC], d'après le théorème de la médiane nous avons :

$BA^2 + BC^2 = 2\,BI^2 + \frac{1}{2}\,AC^2$

$6^2 + 5^2 = 2\,BI^2 + \frac{8^2}{2}$

$2\,BI^2 = 29$

$BI^2 = 14{,}5$ donc :

$BI = \sqrt{14{,}5}$ La médiane [BI] mesure exactement $\sqrt{14{,}5}$ cm soit environ 3,8 cm

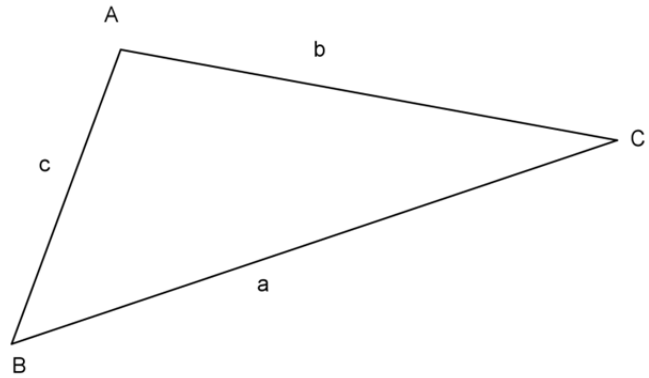
II) Relations métriques dans un triangle

1) Théorème d'Al-Kashi

a) Théorème :

Dans un triangle ABC, en notant: a = BC ; b = AC ; c = AB nous avons :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



b) Démonstration:

• $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

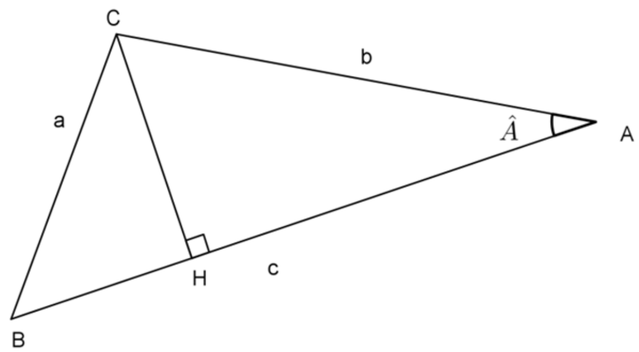
Comme $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\hat{A}$ alors :

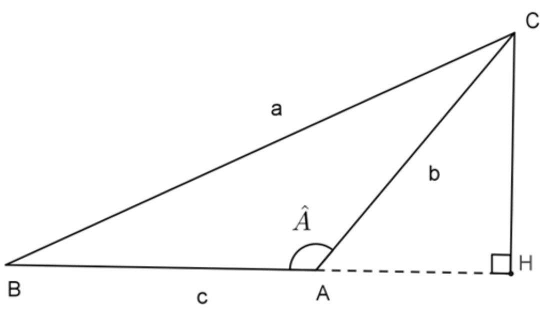
$BC^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\ AC \times AB \times \cos\hat{A}$ Comme $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$

Nous obtenons donc :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

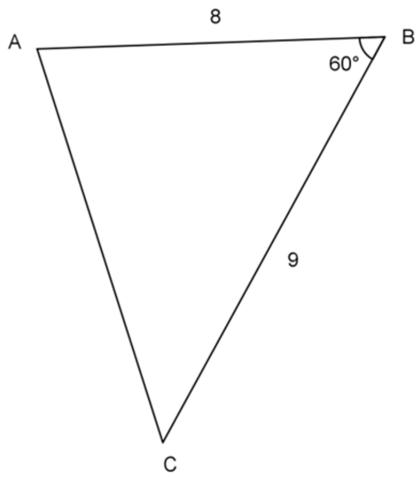
Les autres égalités se démontrent de manière identique.





c) Exemples:

Exemple 1 :



Soit ABC un triangle tel que :

AB = 8 cm, BC = 9 cm et $\widehat{ABC} = 60\,°$

Calculer AC.

D'après le théorème d'Al Kashi :

AC² = AB² + BC² – 2 AB × BC × cos $\hat{B}$

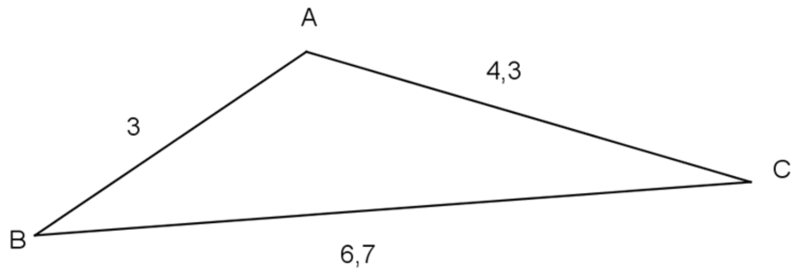
AC² = 8² + 9² - 2 × 8 × 9 × cos $60°$

AC² = 64 + 81 - 144 × $\frac{1}{2}$

AC² = 145 – 72 = 73 donc :

AC = $\sqrt{73}$ cm ≈ 8,5 cm

Exemple 2 :



Dans le triangle ABC tel que: AB = 3 cm AC = 4,3 cm et BC = 6,7 cm.
Déterminer l'angle Â.

D'après le théorème d'Al Kashi,

BC² = AC² + AB² – 2 AC × AB × cos $\hat{A}$

6,7² = 4,3² + 3² – 2 × 4,3 × 3 × cos $\hat{A}$
44,89 = 27,49 – 25,8 cos $\hat{A}$

17,4 = – 25,8 cos $\hat{A}$

cos $\hat{A}$ = $-\frac{17{,}4}{25{,}8}$ ≈ – 0,67 donc :

$\hat{A}$ ≈ 132°

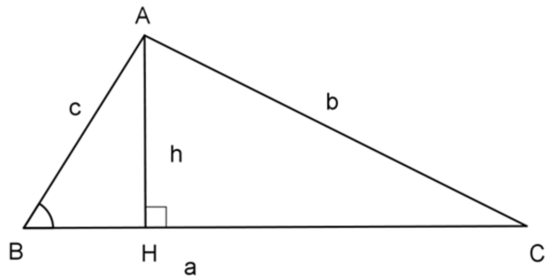
2) Propriété de l'aire d'un triangle

a) Propriété :

Dans un triangle ABC d'aire S :

- **S =** $\frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$**:**
- **S =** $\frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$**:**
- **S =** $\frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$**:**

b) Démonstration :



• Dans le triangle AHB rectangle en H, on a :

$\sin \hat{B} = \frac{h}{c}$ donc $h = c \sin\hat{B}$

• L'aire du triangle ABC est : $S = \frac{a \times h}{2}$

Nous obtenons donc l'égalité :

$S = \frac{a \times c \sin\hat{B}}{2}$

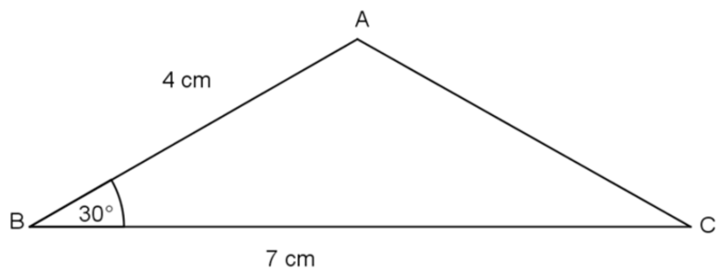
D'où le résultat : S = $\frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$

Les autres égalités se démontrent de manière identique.

c) Exemple :

Soit ABC un triangle tel que AB = 4 cm ; BC = 7 cm et $\hat{B}$ = 30°.

Calculer l'aire du triangle ABC.



S = $\frac{1}{2}$ BC × AB × $sin\hat{B}$

S = $\frac{1}{2}$ ×7 × 4 × $sin\,30°$

S = 7 cm²

3) Formule des sinus

a) Formule

Dans un triangle ABC:

$$\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$$

b) Démonstration:

D'après la propriété de l'aire d'un triangle on a :

- S = $\frac{1}{2}$ $bc\ sin\ \hat{A}$ = $\frac{1}{2}$ $ac\ sin\ \hat{B}$ = $\frac{1}{2}$ $ab\ sin\ \hat{C}$

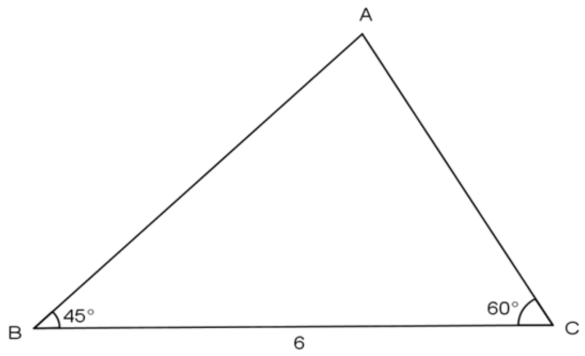
On a donc $\frac{2S}{abc} = \frac{sin\ \hat{A}}{a} = \frac{sin\ \hat{B}}{b} = \frac{sin\ \hat{C}}{c}$ et, par passage à l'inverse,

$$\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{b}{sin\hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$$

c) Exemples :

Exemple 1: Soit ABC un triangle tel que BC = 6 cm $\hat{B}$ = 45° et $\hat{C}$ = 60°.

Calculer AB et AC.



La somme des angles dans un triangle est de 180° donc

$\hat{A}$ = 180 – (45 + 60) = 75°

$\hat{A}$ = 75°

$\frac{BC}{sin\hat{A}} = \frac{AC}{sin\hat{B}} = \frac{AB}{sin\hat{C}}$

$\frac{6}{sin75°} = \frac{AC}{sin45°} = \frac{AB}{sin60°}$

$\frac{6}{sin75°} = \frac{AC}{sin45°}$ donc **AC = $\mathbf{\frac{6 \times sin45°}{sin75°}}$ cm**

AC ≈ 4, 39 cm

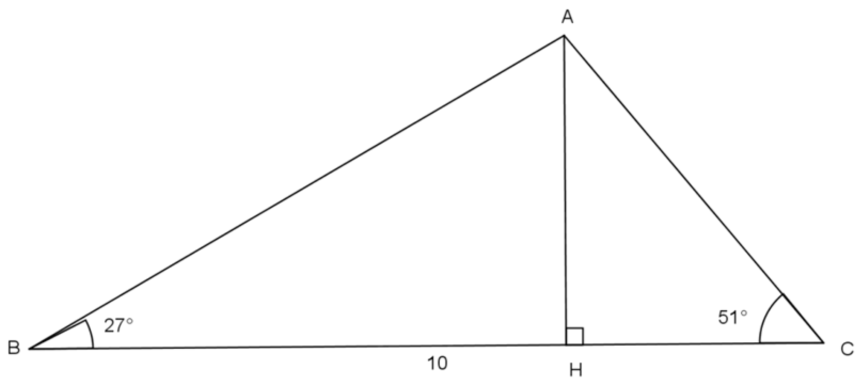
et $\frac{6}{sin75°} = \frac{AB}{sin60°}$ donc **AB = $\mathbf{\frac{6 \times sin60°}{sin75°}}$ cm**

AC ≈ 5, 4 cm

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle tel que: BC = 10 cm $\hat{B}$ = 27° et $\hat{C}$ = 51°.

Calculer AH.



La somme des angles dans un triangle est de 180° donc :

$\hat{A}$ = 180 – (27 + 51) = 102

$\hat{A}$ = 102°

- **Calculons d'abord AB en utilisant la formule des sinus :**

$\frac{BC}{sin\hat{A}} = \frac{AB}{sin\hat{C}}$

$\frac{10}{sin\,102°} = \frac{AB}{sin 51°}$

AB = $\frac{10 \times sin 51°}{sin\,102°}$ cm

- **Maintenant déterminons AH :**

Dans le triangle AHB rectangle en H ,

sin$\hat{B}$ = $\frac{AH}{AB}$

AH = AB × sin$\hat{B}$

AH = $\frac{10 \times sin 51°}{sin\,102°}$ × sin 27°

AH ≈ 3,6 cm