Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

I) Epreuve et loi de Bernoulli

1) Définition

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre , toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

• L'une appelée succès notée S dont la probabilité de réalisation est p

• L'autre appelée échec notée E ou $\overline{S}$ dont la probabilité de réalisation est $1-p$

Exemples

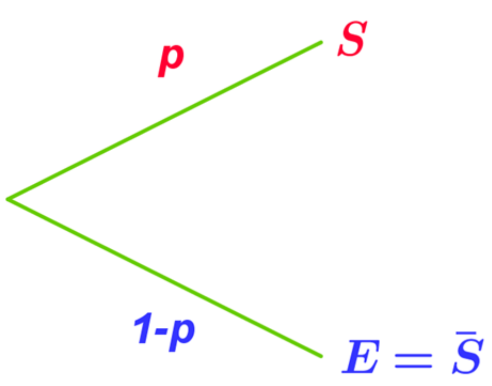
Exemples

1) Un lancer de pièce de monnaie bien équilibrée est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{2}$ (le succès S étant indifféremment « obtenir PILE » ou « obtenir FACE »).

2) Un lancer de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, dans lequel on s'intéresse à l'apparition de S : « obtenir un 1» est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1-p=\frac{5}{6}$

3) Extraire une carte d'un jeu de 32 cartes et s'intéresser à l'obtention d'un as est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{8}$ et la probabilité de $\bar{S}$ est donc $1-\mathrm{p}=\frac{7}{8}$

Illustration



Note historique : Jacques **Bernoulli** est un mathématicien suisse (1654 – 1705)

2) Propriété : loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p , si on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p, elle suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

k	1	0
P(X = k)	p	$1 - p$

Son espérance est E(X) = p , sa variance est V(x) = $p(1-p)$ et

son écart type est σ (X) = $\sqrt{p(1-p)}$.

II) Schéma de Bernoulli

1) Définition 1 : Schéma de Bernoulli

On appelle schéma de Bernoulli comportant n épreuves (n entier naturel non nul) de paramètre p , toute expérience consistant à répéter n fois de façon indépendantes une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exemples

Exemples :

1) 5 lancers successifs d'une pièce bien équilibrée, en appelant succès l'obtention de

PILE constitue un schéma de Bernoulli avec $\boldsymbol{n} = \mathbf{5}$ et de paramètre $\boldsymbol{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

2) 10 lancers de dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, en appelant succès l'apparition de S : « obtenir un 1» constitue un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et de paramètre $p = \frac{1}{6}$

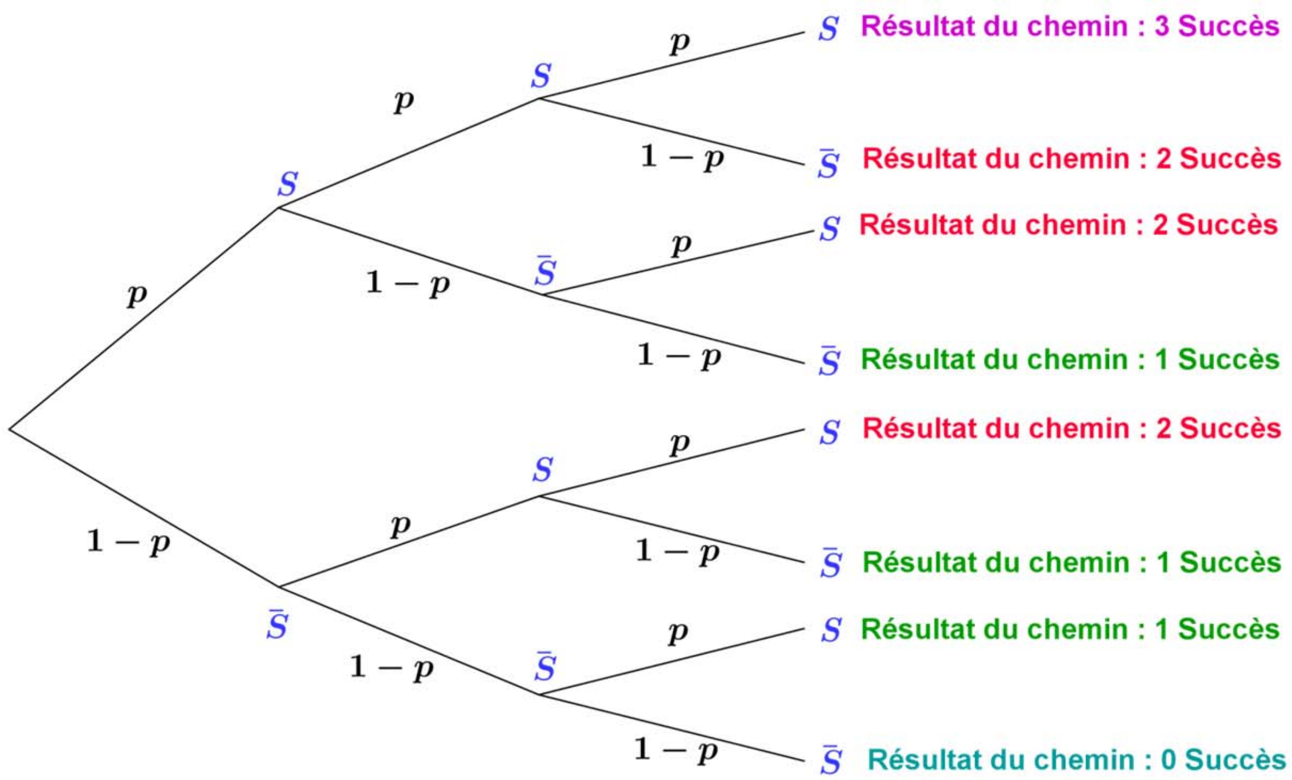
Remarques :

• Un schéma de Bernoulli peut être illustré par un arbre **(ci-dessous cas de n = 3)**

• Un résultat est une liste de n issues S ou $\bar{S}$ (par exemple $\{S, \bar{S}, \bar{S}, S, \bar{S}\}$ dans un schéma à 5 épreuves)

• Le chemin codé $S\ \bar{S}\ \bar{S}\ S\ \bar{S}$ est un chemin qui réalise 2 succès lors de 5 répétitions.

Illustration :



2) Définition 2

On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves (entier naturel non nul), représenté par un arbre.
Pour tout k entier naturel $0 \leq k \leq n$, On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.

Par convention $\binom{0}{0} = 1$

Exemples

Exemple :

Dans l'arbre représenté ci-dessus on a : $n = 3$ et

Pour $k = 0$, il y a 1 seul chemin réalisant 0 succès donc $\binom{3}{0} = 1$

Pour $k = 1$, il y a 3 chemins réalisant 1 succès donc $\binom{3}{1} = 3$

Pour $k = 2$, il y a 3 chemins réalisant 2 succès donc $\binom{3}{2} = 3$

Pour $k = 3$, il y a 1 seul chemin réalisant 3 succès donc $\binom{3}{3} = 1$

III) Propriétés des $\binom{n}{k}$

1) Propriété 1

Pour tout entier naturel n, $n \geq 0$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$

Justification :

Dans un arbre, un seul chemin conduit à 0 succès lors de n répétitions c'est $\bar{S}\,\bar{S}\ldots\ldots\bar{S}$ donc $\binom{n}{0} = 1$

Dans un arbre, un seul chemin conduit à n succès lors de n répétitions c'est $SS\ldots.S$

donc $\binom{n}{n} = 1$

2) Propriété 2

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Justification :

Si $n = 0$, $0 \leq k \leq n$ donne $k = 0$, la propriété est vérifiée grâce à la convention donnée dans la définition plus haut.

Si $n > 0$, alors sur l'arbre représentant le schéma de n épreuves de Bernoulli $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès donc aussi $n - k$ échecs.

Par ailleurs, $\binom{n}{n-k}$ est le nombre de chemins réalisant $n - k$ succès.

Par symétrie de l'arbre, on a donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3) Propriété 3

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Justification :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès dans un schéma de Bernoulli à n répétitions.

Ces k succès sont obtenus :

• d'une part en réalisant k – 1 succès lors des n – 1 premières épreuves suivis d'un succès lors de la dernière épreuve ce qui représente $\binom{n-1}{k-1}$ x 1 chemins dans l'arbre.

• D'autre part en réalisant k succès lors des n – 1 premières épreuves ce qui représente $\binom{n-1}{k}$ chemins dans l'arbre.

$$\text{D'où } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Remarque importante:

Ces trois propriétés permettent de calculer les valeurs de $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}$ et pour tout $\boldsymbol{k}$ tel que $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}$

Exemple

Calculer $\binom{5}{3}$

$\binom{5}{3}=\binom{4}{2}+\binom{4}{3} = \binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$	propriété 3
$= \binom{3}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}+1$	propriété 2 et propriété 1
$= 3\times\binom{3}{2} + 1 = 3\times\binom{2}{1}+3\times\binom{2}{2} + 1$	propriété 3
$= 3\times\binom{1}{0}+3\times\binom{1}{1}+3+1$	propriété 3 et propriété 1
$= 3 + 3 + 3 + 1 = 10$	propriété 1

On comprend que ces calculs peuvent devenir fastidieux, c'est pourquoi on se servira du résultat établi par Blaise Pascal dans le triangle suivant :

IV) Triangle de Pascal

Ce tableau triangulaire donne la valeur des $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}$ et pour tout $\boldsymbol{k}$ tel que $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}$ à l'intersection de la ligne portant la valeur de n et de la colonne portant la valeur de $\boldsymbol{k}$.

Remarque :

Ce tableau peut être poursuivi pour toutes valeurs de n et de k

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Valeur de $\binom{6}{4}$

Propriété 1

Propriété 3
6 + 4 = 10

Propriété 1

La propriété 2 est illustrée par la symétrie existant sur chacune des lignes du tableau

V) Loi binomiale

1) Propriété

Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus à pour loi de probabilité :

P(X = k) = $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et , notée $\mathscr{B}(n , p)$

Justification :

Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli la variable qui compte les succès prend pour valeurs 0, 1, 2,…., n

Pour un entier k compris entre 0 et n, l'événement (X =k) est représenté dans l'arbre par les chemins qui comportent k succès et n – k échecs, il y en a $\binom{n}{k}$

Chacun de ces chemins comporte k fois S et n – k fois $\bar{S}$ et a donc pour probabilité :

$p^{nombre\ de\ S} \times (1-p)^{nombre\ de\ \bar{S}}$

Il en résulte que P(X =) = $\binom{n}{k}$ p^k x $(1-p)^{n-k}$

Exemples :

1) On considère l'expérience suivante : On lance 10 fois de suite un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur correspondant au nombre de fois où la face 1 apparaît.

a) Quelle est la loi suivie par la variable X ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement $X = 3$?

c) Quelle est la probabilité que la face 1 apparaisse au moins 1 fois ?

Solution :

a) Les lancers étant identiques et indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$ $\mathcal{B}(10 , \frac{1}{6})$

b) P(X= 3) = $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$ = 120 x $\frac{5^7}{6^{10}} \approx$ 0,155

c) L'événement « la face 1 apparaît au moins une fois » correspond à l'événement « $X \geq 1$ » qui a pour événement contraire « $X = 0$ »

Donc on a P($X \geq 1$) = 1 − P ($X = 0$) = 1 − $\binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ ≈ 0,838

2) Deux joueurs Alain et Bernard s'affrontent dans un tournoi de tennis. Alain et Bernard jouent 9 matchs. La probabilité qu'Alain gagne un match est 0,6.Le vainqueur est celui qui gagne le plus de matchs. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de matchs gagnés par Bernard.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) Ecrire l'événement « Bernard gagne le tournoi » à l'aide de X puis calculer sa probabilité.

Solution :

a) Les matchs étant identiques et leurs résultats indépendants X suit une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}4$ $\mathcal{B}(9 , 0{,}4)$

b) Bernard gagne le tournoi si il gagne au moins 5 matchs, donc si l'événement « $X \geq 5$ » est réalisé

Or P($X \geq 5$) = P($X = 5$) + P($X = 6$) + P($X = 7$) + P($X = 8$) +P($X = 9$)

P($X \geq 5$)= $\binom{9}{5}\, 0{,}4^5\, 0{,}6^4 + \binom{9}{6}\, 0{,}4^6\, 0{,}6^3 + \binom{9}{7}\, 0{,}4^7\, 0{,}6^2 + \binom{9}{8}\, 0{,}4^8\, 0{,}6^1 + \binom{9}{9}\, 0{,}4^9$

P(X≥ 5) ≈ 0,267

2) Espérance, Ecart type

L'espérance de la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p est E(X) = np et son écart type est σ(X) = $\sqrt{np(1-p)}$

Exemples

Dans l'exemple 1) précédent

E(X) = $10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} \approx 1{,}67$ et σ (X) = $\sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}18$

Dans l'exemple 2) précédent

E(X) = $9 \times 0{,}4 = 3{,}6$ et σ (X) = $\sqrt{9 \times 0{,}4 \times 0{,}6} = \sqrt{2{,}16} \approx 1{,}47$