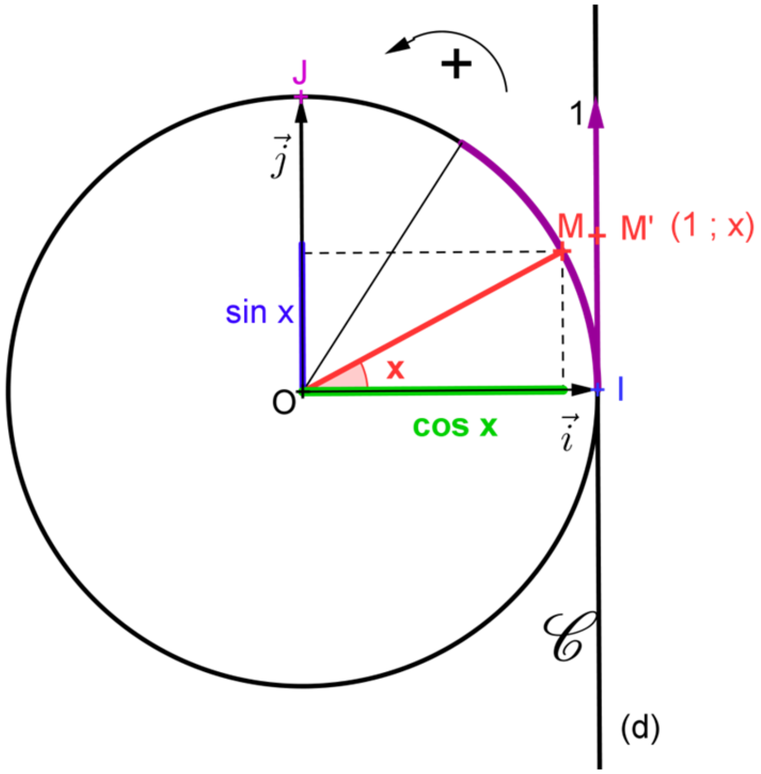
Cosinus et sinus d'un nombre réel

I) Définition

Soit x un nombre réel. On considère le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) et la tangente (d) en I. On munit (d) d'un repère (I ; $\vec{j}$). (voir figure ci-dessous)
Par enroulement de la droite (d) sur le cercle ($\mathscr{C}$), M'(1 ; x) a pour image M.

Définition :

Les coordonnées du point M sont : (cos x ; sin x)
Les cosinus de x noté cos x est l'abscisse du point M.
Le sinus de x noté sin x est l'ordonnée du point M.

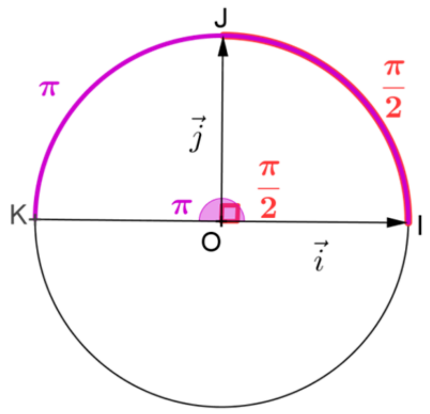


Exemples :
Le nombre $\frac{\pi}{2}$ a pour image le point J de coordonnées (0 ; 1)

donc cos $\frac{\pi}{2}$ = 1 et sin $\frac{\pi}{2}$ = 0

Le nombre π a pour image le point K de coordonnées (-1 ; 0)

donc cos π = -1 et sin π = 0



II) Propriétés :

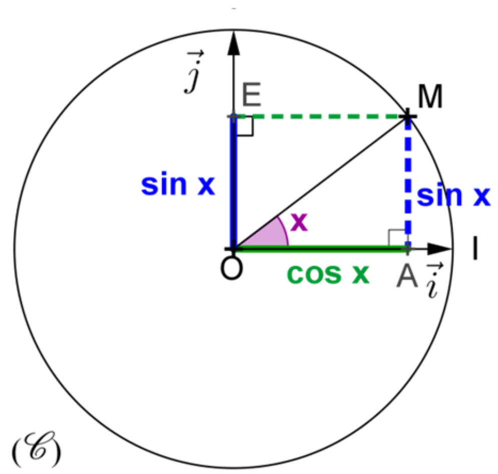
Pour tout nombre réel x et tout nombre entier relatif k :

- **-1 ≤ cos x ≤ 1** **-1 ≤ sin x ≤ 1**
- **cos $(x+2k\pi)$ = cos x** **sin $(x+2k\pi)$ = sin x**
- **cos² x + sin² x = 1**

Démonstration:

• Le périmètre du cercle étant 2π , k tours du cercle correspondent 2$k\pi$ on a donc :
x' = x + 2$k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). D'où cos $(x+2k\pi)$ = cos x et sin $(x+2k\pi)$ = sin x

•



Soit M $(x\ ;\ y)$. Dans le triangle OMA rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :

OM² = OA² + AM²

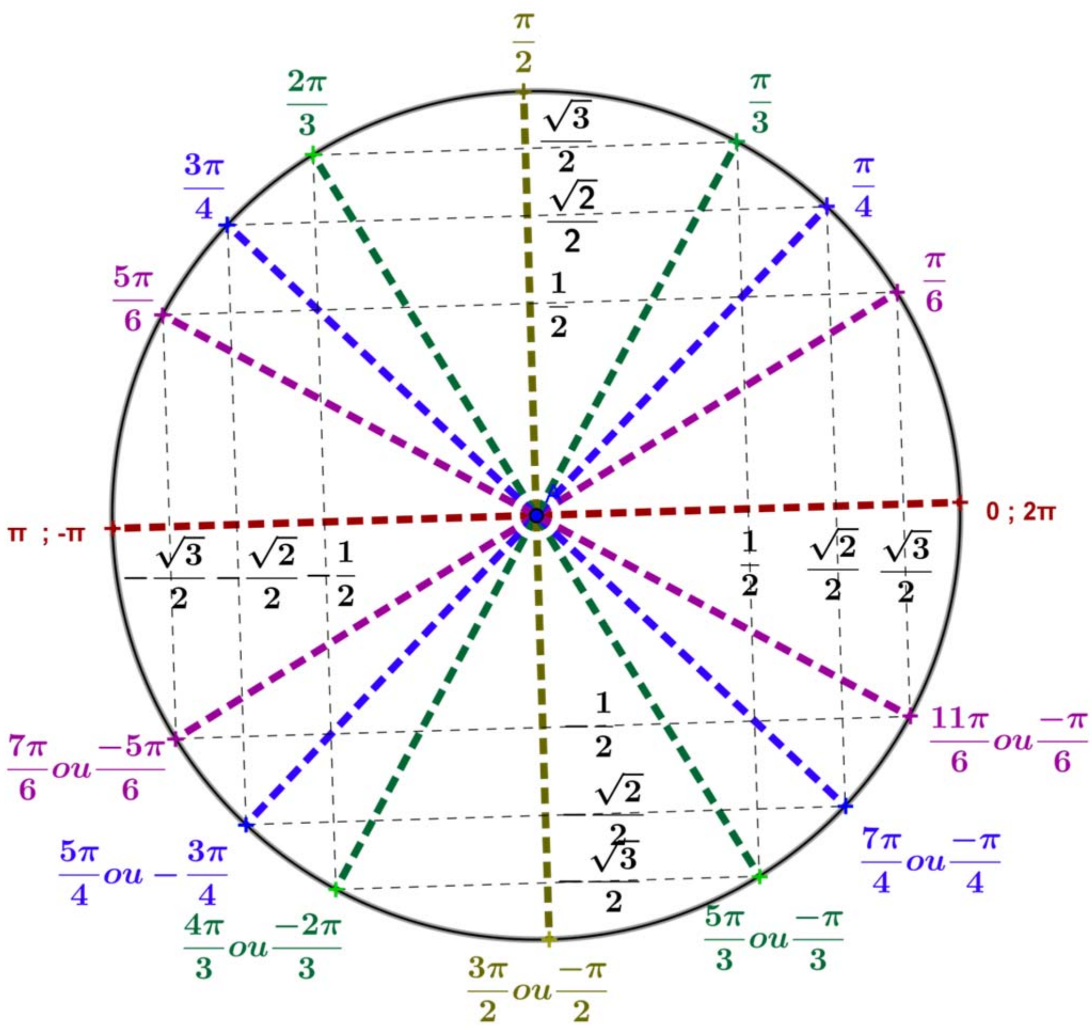
AM = OE = sin x
OA = cos x
OM = 1 car sa mesure est le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ on obtient donc :
1 = cos² x + sin² x

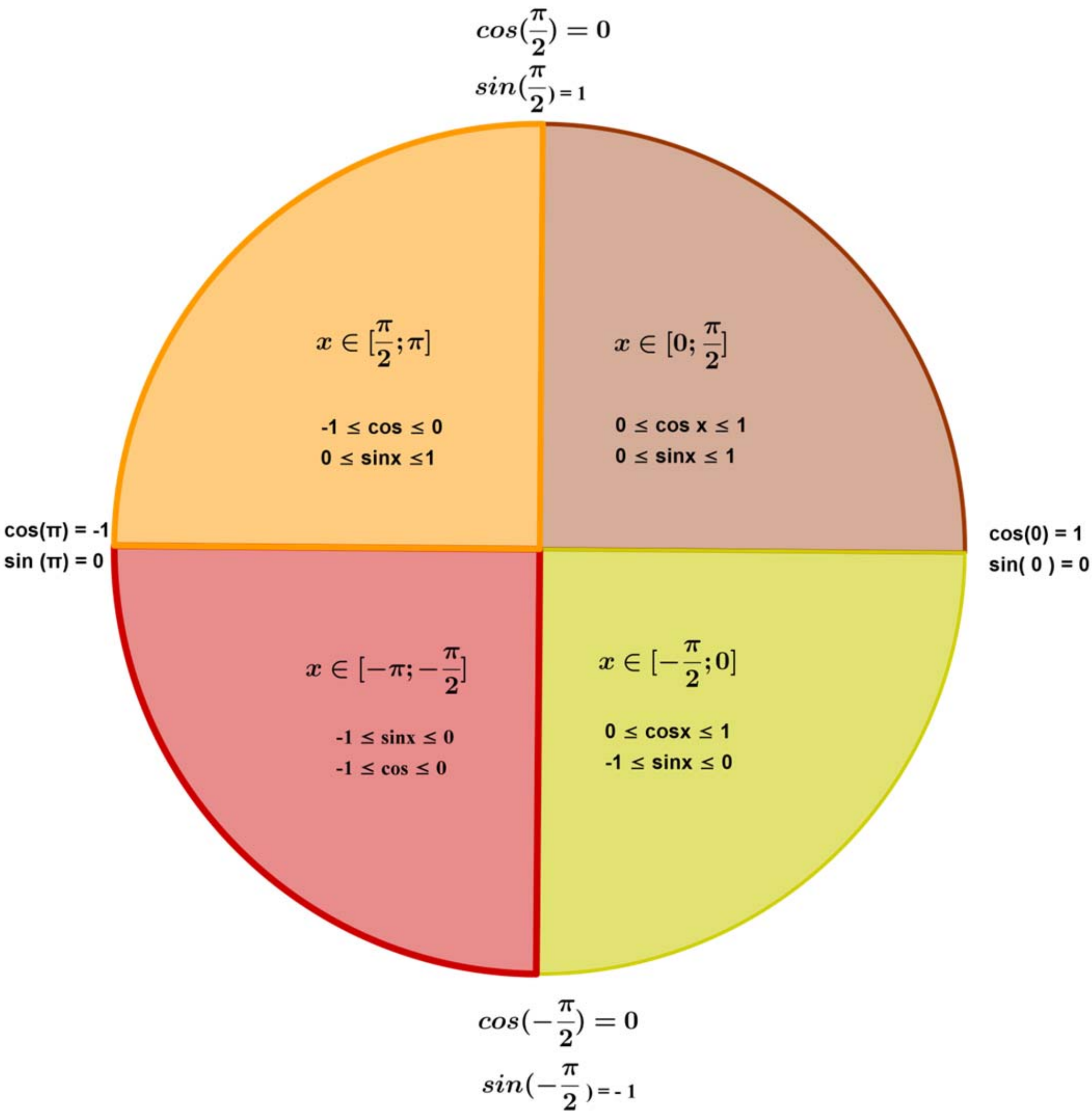
• Comme cos² x **+** sin² x = 1 alors -1 ≤ cos x ≤ 1 et -1 ≤ sin x ≤ 1
Autre explication : comme cos x et sin x sont les abscisses et les ordonnées de tout point du cercle trigonométrique alors -1 ≤ cos x ≤ 1 et -1 ≤ sin x ≤ 1

III) Tableau des valeurs à connaitre

x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*	*0*

Valeurs usuelles sur le cercle trigonométrique :





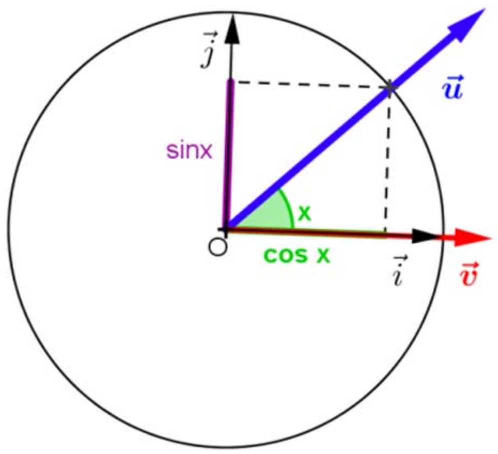
IV) Cosinus et sinus d'angles orientés

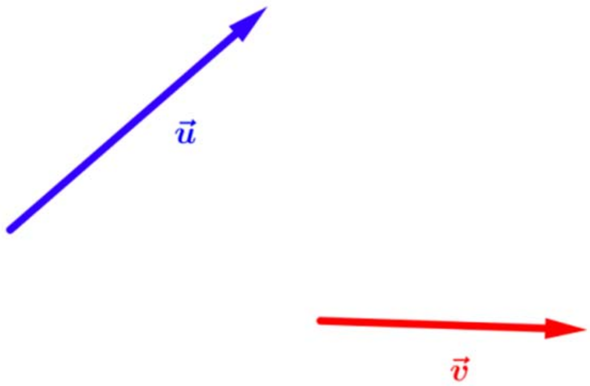
1) Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Il existe un réel x tel que $(\vec{u} ; \vec{v}) = x$.

cos $(\vec{u} ; \vec{v})$ = cos x

sin $(\vec{u} ; \vec{v})$ = sin x





Exemples

Exemple 1 :

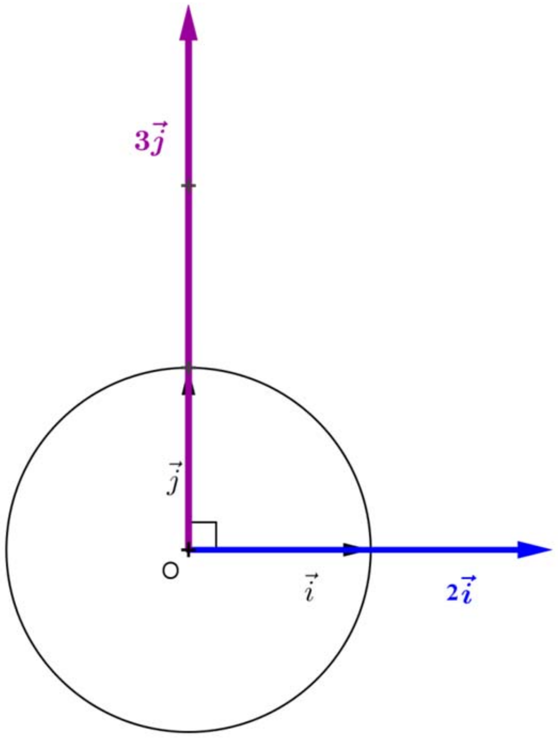
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) . Déterminer :

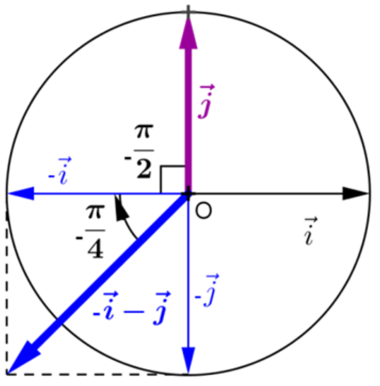
a) sin ($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) b) cos ($2\vec{\imath}$; $3\vec{\jmath}$) c) cos ($-\vec{\imath}-\vec{\jmath}$; $\vec{\jmath}$) et sin ($-\vec{\imath}-\vec{\jmath}$; $\vec{\jmath}$)

Solutions:

($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) = $\frac{\pi}{2}$ (2π) donc sin ($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) = 1

($2\vec{\imath}$; $3\vec{\jmath}$) = $\frac{\pi}{2}$ (2π) donc cos ($2\vec{\imath}$; $3\vec{\jmath}$) = 0





$(-\vec{\imath}\ -\vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\ \frac{3\pi}{4} \qquad (2\pi)$

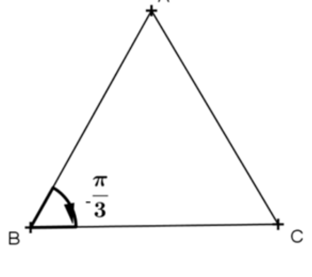
$\cos\ (-\vec{\imath}\ -\vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ) = \cos\ (-\ \frac{3\pi}{4}\ ) = -\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\ (-\vec{\imath}\ -\vec{\jmath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ) = \sin\ (-\ \frac{3\pi}{4}\ ) = -\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemple 2 : ABC est un triangle équilatéral.

Déterminer le sinus et le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC})$

Solution :



ABC est un triangle équilatéral donc :

$(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = -\ \frac{\pi}{3} \qquad (2\pi)$

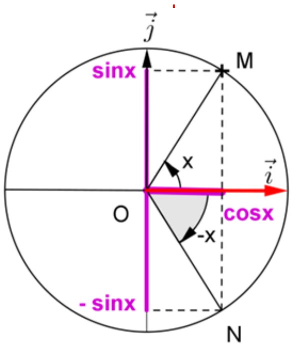
$\cos\ (\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \cos\ (-\ \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

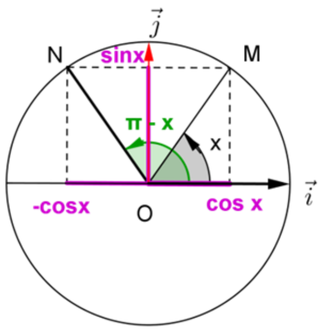
$\sin\ (\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \sin\ (-\ \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

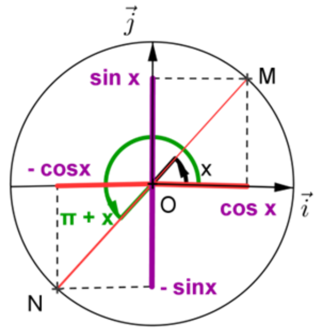
2) Formules trigonométriques

Propriété 1 :

• **cos (-x) = cos x** **sin (-x) = -sin x**	• **cos $(\pi - x)$ = $-$ cos x** **sin $(\pi - x)$ = sin x**	• **cos $(\pi + x)$ = $-$ cos x** **sin $(\pi + x)$ = $-$ sin x**







M et N ont la même abscisse et les ordonnées opposées.

M et N ont la même ordonnée et les abscisses opposées.

M et N ont les abscisses et les ordonnées opposées.

Démonstration :

• Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Par symétrie on en déduit que : cos (-x) = cos x et sin (-x) = -sin x

• Les angles de mesures x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Par symétrie on en déduit que : cos $(\pi - x)$ = $-$ cos x et sin $(\pi - x)$ = sin x

• Les angles de mesures x et $x + \pi$ sont symétriques par rapport à l'origine. Par symétrie on en déduit que : cos $(\pi + x)$ = $-$ cos x et sin $(\pi + x)$ = $-$sin x

Propriété 2 :

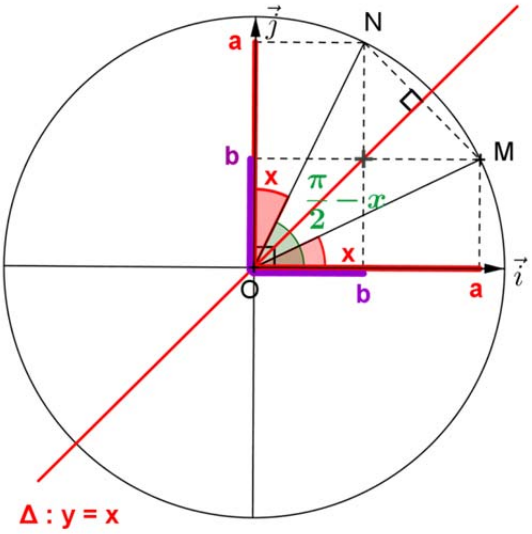
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

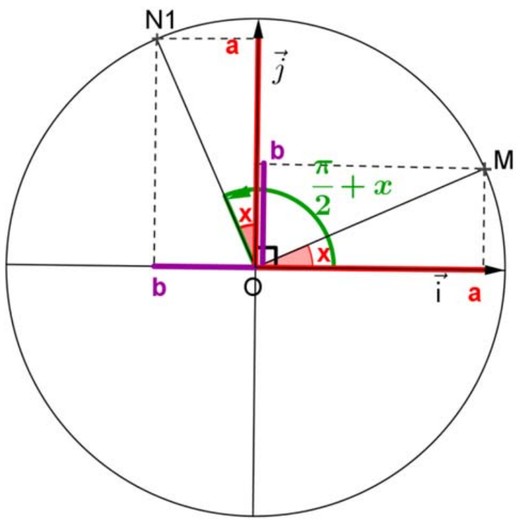
  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$

  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

En notant $b = \sin x$ et $a = \cos x$





M et N sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$
Leurs coordonnées sont permutées :
L'abscisse de l'un et l'ordonnée de l'autre et vice-versa.

N_1 est le symétrique de N (de la figure ci-contre) par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = b = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = a = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -b = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = a = \cos x$

Un démonstration plus rigoureuse de ces formules se font à partir des formules d'addition du cosinus et sinus (voir la fiche de cours : Application du produit scalaire : Trigonométrie)