

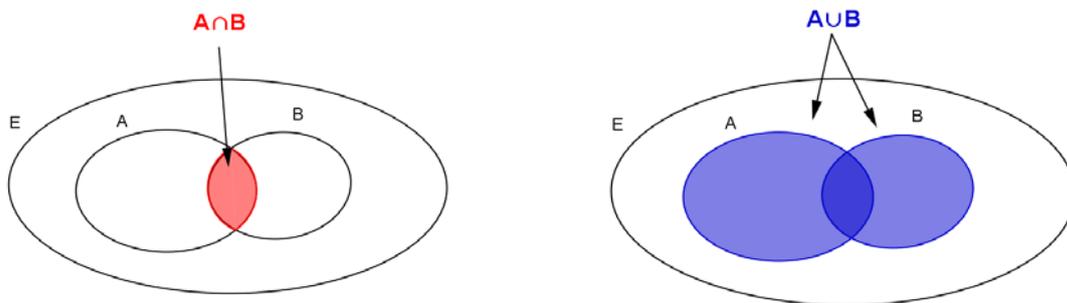
Calcul de probabilités

I) Intersection et réunion d'événements

1) Définition

A et B sont deux événements d'un même univers E.

- **L'intersection de A et B est l'événement noté $A \cap B$ formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A et l'événement B.**
- **La réunion de A et B est l'événement noté $A \cup B$ formé des issues qui réalisent l'événement A ou l'événement B, c'est à dire au moins l'un des deux.**



Exemples :

1) Dans une urne on place 10 cartons portant chacun un numéro de 1 à 10. On extrait un carton de l'urne. On considère les événements :

A : « le carton extrait porte un numéro divisible par 3 »

B : « le carton extrait porte un numéro inférieur ou égal à 6 »

On a : $A = \{ 3, 6, 9 \}$ et $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Alors :

$A \cap B$: «le carton extrait porte un numéro divisible par 3 **et** inférieur ou égal à 6 »

d'où $A \cap B = \{ 3, 6 \}$

et $A \cup B$: «le carton extrait porte un numéro divisible par 3 **ou** inférieur ou égal à 6 »

d'où $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 \}$

2) Dans un sac on place les 4 rois, les 4 dames et les 4 valets d'un jeu de cartes.

On extrait du sac une carte et on considère les événements suivants :

T : « la carte extraite est une carte de trèfle »

D : « la carte extraite est une dame »

Alors :

$T \cap D$: « la carte extraite est une carte de trèfle **et** une dame »

d'où $T \cap D = \{ \text{dame de trèfle} \}$ et

et $T \cup D$: « la carte extraite est une carte de trèfle **ou** une dame »

d'où $T \cup D = \{ \text{roi de trèfle, dame de trèfle, valet de trèfle, dame de carreau, dame de coeur, dame de pique} \}$

2) Événements incompatibles

Soit A et B deux événements d'un même univers. Lorsque aucune issue ne réalise à la fois l'événement A et l'événement B, on dit que les événements A et B sont **incompatibles, on a alors $A \cap B = \emptyset$**

Dans ce cas on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemples :

Reprenons les exemples précédents

1) Dans le cas de l'urne contenant les 10 cartons numérotés de 1 à 10, considérons les événements :

C : « le carton extrait porte un numéro pair »

D : « le carton extrait porte un numéro impair »

Les événements C et D sont incompatibles. $p(C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = 1$

2) Dans le cas du sac contenant les cartes, considérons les événements suivants :

R : « la carte extraite est roi »

V : « la carte extraite est un valet »

K : « la carte extraite est une carte de carreau »

T : « la carte extraite est une carte de trèfle »

Les événements R et V sont incompatibles, les événements K et T le sont aussi

$$p(R \cup V) = p(R) + p(V) = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$p(K \cup T) = p(K) + p(T) = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

3) Une formule

Soit deux événements A et B d'un même univers sur lequel on a défini une loi de probabilité p.

Pour tout A et tout B on a $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Démonstration :

On note A_1 l'événement formé des issues réalisant A qui ne sont pas dans B.

A_1 et B sont incompatibles et

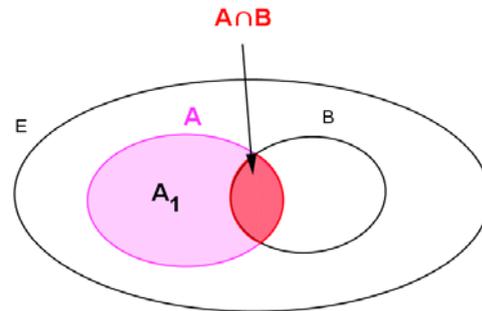
$A_1 \cup B = A \cup B$ donc :

$$p(A \cup B) = p(A_1) + p(B)$$

A_1 et $A \cap B$ sont incompatibles et

$A_1 \cup (A \cap B) = A$ donc :

$$p(A) = p(A_1) + p(A \cap B)$$



Avec les deux égalités notées en gras on obtient :

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(B) + p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(A \cap B) + p(B)$$

d'où:

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

Exemples :

1) Dans un sac on place 5 jetons rouges numérotés de 1 à 5 et 3 jetons blancs numérotés de 1 à 3. Tous les jetons sont indiscernables au toucher. On extrait un jeton du sac. On considère les événements :

A : « le jeton extrait est blanc »

B : « le jeton porte le numéro 2 »

C : « le jeton porte le numéro 5 »

Comme les jetons sont indiscernable au toucher, l'expérience suit une loi équirépartie et

on donc : $p(A) = \frac{3}{8}$ $p(B) = \frac{2}{8}$ et $p(C) = \frac{1}{8}$

On a $A \cap B$: « le jeton extrait est blanc et porte le numéro 2 » d'où $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$

et $A \cup B$: « le jeton extrait est blanc ou porte le numéro 2 » d'où $p(A \cup B) = \frac{4}{8}$

(en effet il y a 3 jetons blancs , 1 jeton rouge portant le numéro 2)

On a bien $p(A \cap B) + p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

On remarque que A et C sont incompatibles (en effet aucun jeton blanc ne porte le numéro 5)

d'où $p(A \cap C) = 0$ et donc $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

2) Soit un univers E et deux événements de E, tels que $p(A) = 0,3$ et $p(B) = 0,4$ de plus $p(A \cup B) = 0,5$

Alors on peut calculer $p(A \cap B)$: $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,2$

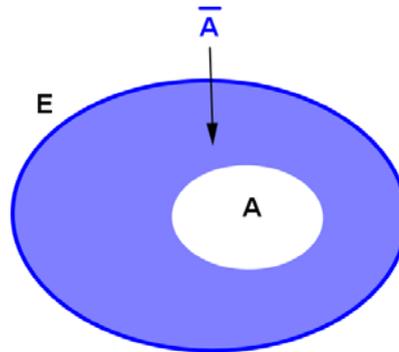
4) Événement contraire

Soit A un événement d'un univers E .

L'événement contraire de A est l'événement formé des issues de E qui ne réalisent pas A

On le note \bar{A}

On a $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$



d'où $p(\bar{A}) + p(A) = 1$ en appliquant la formule vue au 3)

Exemples :

1) On jette une pièce de monnaie truquée de telle manière qu'elle retombe sur pile 2 fois sur 3. On appelle A l'événement « la pièce retombe sur Pile »

On a donc $p(A) = \frac{2}{3}$ si on appelle B l'événement « la pièce retombe sur Face », il est

clair que $B = \bar{A}$ donc $p(B) = 1 - p(A) = \frac{1}{3}$

2) On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :

A : « la face qui apparaît est un multiple de 5 »

B : « la face qui apparaît n'est pas un multiple de 5 »

A et B sont évidemment deux événements contraires donc $p(A) + p(B) = 1$

comme $p(A) = \frac{1}{6}$ on a $p(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$