Paramètres de position et de dispersion

I) Mesures de position

1) La moyenne

a) Définition

Soit la série statistique définie dans le tableau suivant :

Valeur	x_1	x_2	.....	x_p
Effectif	n_1	n_2	.....	n_p

Effectif total : N = $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$

La moyenne de cette série statistique est le réel, noté $\overline{x}$, tel que :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N}$$

Exemple 1:

Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs

taille (en m)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Effectif	8	10	25	32	19	4	2

La taille moyenne est :

$$\overline{x} = \frac{1{,}5\text{x}8 + 2\text{x}10 + 2{,}5\text{x}25 + 3\text{x}32 + 3{,}5\text{x }19 + 4\text{x}4 + 4{,}5\text{x}2}{100} = 2{,}82$$

Exemple 2 :

Un supermarché a relevé les dépenses (en €) de ses clients en 2 heures un jour donné, les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Dépenses (en €)	[0 ; 30 [	[30 ; 60 [	[60 ; 100 [	[100 ; 120 [
Milieu de classe	15	45	80	110
Effectif	12	25	42	67

Pour calculer la moyenne on détermine les milieux des classes de la distribution puis on effectue le calcul : $\overline{x} = \frac{15\text{x}12 + 45\text{x}25 + 80\text{x}42 + 110\text{x}67}{146} \approx 82{,}43$ €

(146 est l'effectif total)

b) Propriété 1

On peut calculer la **moyenne** $\overline{x}$ à partir de la distribution des fréquences :

Valeur	x_1	x_2	.....	x_p
Fréquence	f_1	f_2	.....	f_p

$$\overline{x} = f_1\, x_1 + f_2\, x_2 + \dots + f_p\, x_p$$

Exemple :

On étudie dans une maternité la taille de 50 nouveaux nés

Taille en cm	47	48	49	50	51	52
Effectif	5	8	12	15	9	1
Fréquence	0,1	0,16	0,24	0,3	0,18	0,02

$$\overline{x} = 0{,}1\text{x}47 + 0{,}16\text{x}48 + 0{,}24\text{x}49 + 0{,}3\text{x}50 + 0{,}18\text{x}51 + 0{,}02\text{x}52 = 49{,}36$$

c) Propriété 2

Si on ajoute le même nombre k à toutes les valeurs de la série statistique, la moyenne augmente de k

Exemple :

Dans l'exemple précédent on pourrait soustraire 50 à toutes les tailles on obtiendrait une nouvelle moyenne :

$\overline{y} = 0{,}1\text{x}(-3) + 0{,}16\text{x}(-2) + 0{,}24\text{x}(-1) + 0{,}3\text{x}0 + 0{,}18\text{x}1 + 0{,}02\text{x}2 = -0{,}64$

et on retrouve $\overline{x}$ en rajoutant 50 à $\overline{y}$: $\overline{x} = -0{,}64 + 50 = 49{,}36$

d) Propriété 3

Si on multiplie toutes les valeurs de la série statistique par un même nombre k, la moyenne est multipliée par k

Exemple :

En étudiant maintenant la masse de 50 nouveaux nés de la maternité on obtient :

Masse en kg	2,8	2,9	3	3,1	3,2
Effectif	14	10	18	7	1

On peut multiplier les masses par 10 on calcule ainsi une moyenne $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \frac{28\text{x}14+29\text{x}10+30\text{x}18+31\text{x}7+32\text{x}1}{50} = 29{,}42$$

et on retrouve la moyenne en divisant $\overline{y}$ par 10 : $\overline{x} = \dfrac{29{,}42}{10} = 2{,}942$

2) La médiane

a) Définition

La liste des N données est rangée par ordre croissant

- **Si N est impair (N = 2*n* + 1) la médiane est la donnée de rang *n* + 1**
- **Si N est pair (N = 2*n*) la médiane est la demi somme des données de rang *n* et de rang *n* + 1**

Exemple 1 :

Un boulanger teste les masses (en grammes) de 30 baguettes qu'il vient de fabriquer, il obtient les résultats suivants :

235	235	237	238	238	239	239	239	240	241
241	243	245	247	247	249	250	205	250	250
250	251	251	253	253	255	255	255	257	260

Comme l'effectif total N = 30 est pair la médiane est la demi somme de la donnée de rang 15 et la donnée de rang 16 soit : $\frac{247 + 249}{2} = 248$

Exemple 2 :

Le tableau ci-dessous indique la durée (en minutes) de connexion internet par jour de 43 familles interrogées

Durée en minutes	40	60	80	120	180	200	240	300
Effectif	2	9	11	7	5	2	4	3

Comme l'effectif total N = 43 = 2 x 21 + 1 est impair la médiane est la donnée de rang 22 soit 80 minutes

b) Propriétés

- Si on ajoute le même nombre *k* à toutes les valeurs de la série statistique, la médiane augmente de *k*
- Si on multiplie toutes les valeurs de la série statistique par un même nombre *k*, la médiane est multipliée par *k*

3) Les quartiles

a) Définitions

La liste des N données est rangée par ordre croissant

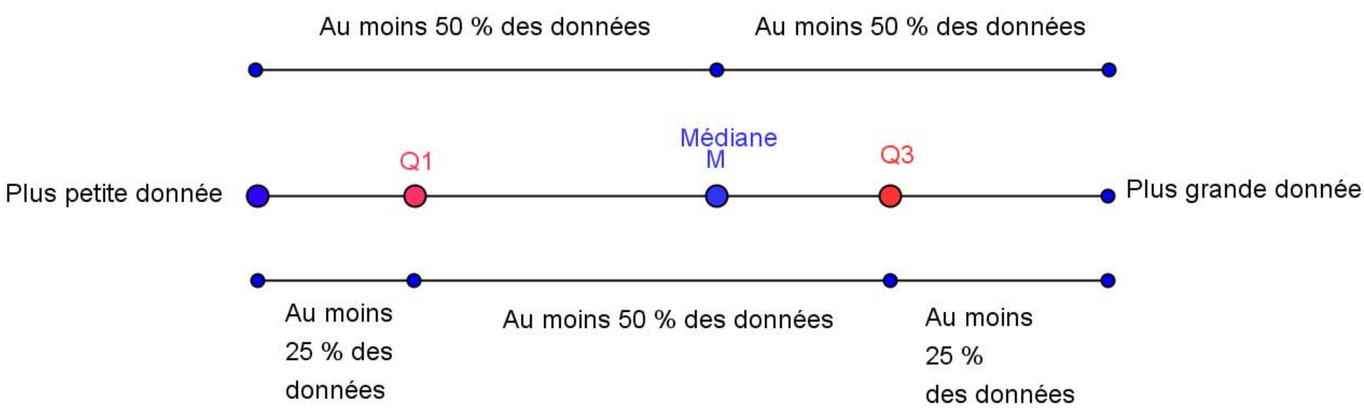
Le premier quartile (Q_1) est la plus petite donnée de la liste telle qu'au moins un quart des données de la liste sont inférieures ou égales à Q_1.

Le troisième quartile (Q_3) est la plus petite donnée de la liste telle qu'au moins les trois quarts des données de la liste sont inférieures ou égales à Q_3 .

Dans l'exemple 1 précédent portant sur les masses des baguettes le quart de l'effectif étant $\frac{30}{4}$ =7,5 Q_1 est la donnée de rang 8 soit Q_1 = 239 g et Q_3 est la donnée de rang 22 soit Q_3 = 251 g

Dans l'exemple 2 précédent portant sur la durée de connexion internet le quart de l'effectif étant $\frac{43}{4}$ = 10,75 Q_1 est la donnée de rang 11 soit Q_1 = 60 min et Q_3 est la donnée de rang 33 soit Q_3 = 180 min

b) Illustration



II Mesures de dispersion

a) L'étendue

L'étendue d'une série statistique est égale à la différence entre la plus grande et la plus petite des données de la série.

Dans l'**exemple 1** l 'étendue e = 260 – 235 = 25
Dans l'**exemple 2** l'étendue e = 300 – 40 = 260

b) l'écart interquartile

L'écart interquartile est égal à la différence $Q_3 - Q_1$

Dans l'**exemple 1** $Q_3 - Q_1 = 251 - 239 = 12$
Dans l'**exemple 2** $Q_3 - Q_1 = 180 - 60 = 120$