Fonction polynôme du second degré : Forme canonique

I) Introduction.

Soit g(x) = a(x - s)²+h.

Toute fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous cette forme.

Le passage de la forme développée à la forme canonique n'est pas au programme de la classe de seconde, mais reconnaître la forme canonique d'une fonction polynôme de second degré donnée sous forme développée est au programme.

Exemple :

Soit u la fonction polynôme définie sur I = [−5 ;5] par

$u(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

Montrer que pour tout x dans I, $u(x) = 3(x-1)^2 - 4$ .est la forme canonique de $u(x)$
On développe la forme proposée :

$$3(x-1)^2 - 4 = 3(x^2 - 2x + 1) - 4 = 3x^2 - 6x + 3 - 4 = 3x^2 - 6x - 1 = u(x).$$

L'intérêt de cette écriture est de permettre l'étude complète de la fonction polynôme g, c'est-à-dire d'en donner les variations et la courbe rapidement.

II) Etude générale, Tableau de variations, Courbe

La courbe de la fonction g est une parabole.

Quand elle admet un axe de symétrie, il s'agit de la droite d'équation x = s.

Remarque. Voir la résolution de l'exercice-type I ci-dessous pour le caractère symétrique de la courbe.

1) Supposons a strictement positif

Alors la fonction g est
strictement décroissante sur tout domaine inclus dans l'intervalle $]-\infty; s]$
et
strictement croissante sur tout domaine inclus dans l'intervalle $[s; +\infty[$.

Par conséquent, si la valeur s appartient à l'ensemble de définition de g, alors g(s) vaut h et c'est le minimum absolu de g : pour tout x différent de s, g(x) > g(s) = h.

Tableau de variations de g.

On suppose que g est définie sur un intervalle $[m;M]$ qui contient la valeur s :

x	m		s		M
$g(x)$	g(m)	↘	g(s)	↗	g(M)

Remarque : g(s) = h

On trouvera en fin de cette fiche la démonstration de ces résultats si nécessaire.

2) Supposons que a strictement négatif.

Alors la fonction g est
strictement croissante sur tout domaine inclus dans l'intervalle $]-\infty;s]$
et
strictement décroissante sur tout domaine inclus dans l'intervalle $[s;+\infty[$**.**

Par conséquent, si la valeur s **appartient à l'ensemble de définition de g, alors g(s) vaut h et c'est le maximum absolu de g : pour tout** x **différent de s, g(**x**)<g(s)=h.**

Tableau de variations de g.

On suppose que g est définie sur un intervalle $[m;M]$ qui contient la valeur s

x	m		s		M
$g(x)$	g(m)	↗	g(s)	↘	g(M)

Remarque : g(s) = h

On trouvera en fin de cette fiche la démonstration de ces résultats si nécessaire.

3) Exemples

Exemple 1 : Reprenons l'exemple précédent :

Soit u la fonction polynôme définie sur I = $[-5\ ;\ 5]$ par

$u(x) = 3x^2 - 6x - 1$.Nous avons montré précédemment que sa forme canonique est

$u(x) = 3(x-1)^2 - 4$

Sa courbe représentative est une parabole, elle admet un axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$ (s = 1) comme a = 3 (strictement positif), le tableau de variation est donc :

x	-5		1		5
$u(x)$	104	↘	-4	↗	44

u(-5) = 3(-5-1)² - 4 = 104 u(1) = -4 u(5) = 44

Exemple 2 : Prenons un autre exemple où a < 0:

Soit v la fonction polynôme définie sur I = $[-3\ ;\ 3]$ par

$v(x) = -4x^2 + 16x - 11$.On peut facilement montrer , comme précédemment , que pour tout x dans I , sa forme canonique est :

$v(x) = -4\,(x-2)^2 + 5$

Sa courbe représentative est une parabole, elle admet un axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$ (s = 2) comme a = -4 , (strictement négatif), le tableau de variation est donc :

x	-3		2		3
$v(x)$	-95	↗	5	↘	1

v(-3) = -4(-3-2)²+ 5 = -95 v(2) = 5 v(3) = -4(3-2)²+ 5 = 1

4) Exercice type

Exercice-type I : Soit u la fonction polynôme définie sur I = [-5 ;5] par $\mathbf{u(x)} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - \mathbf{4}$.

Question 1 : Montrer que pour tout x dans I, $\mathbf{u(x)} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2 - \frac{9}{2}$.

Question 2 : Etablir le tableau de variations de u.

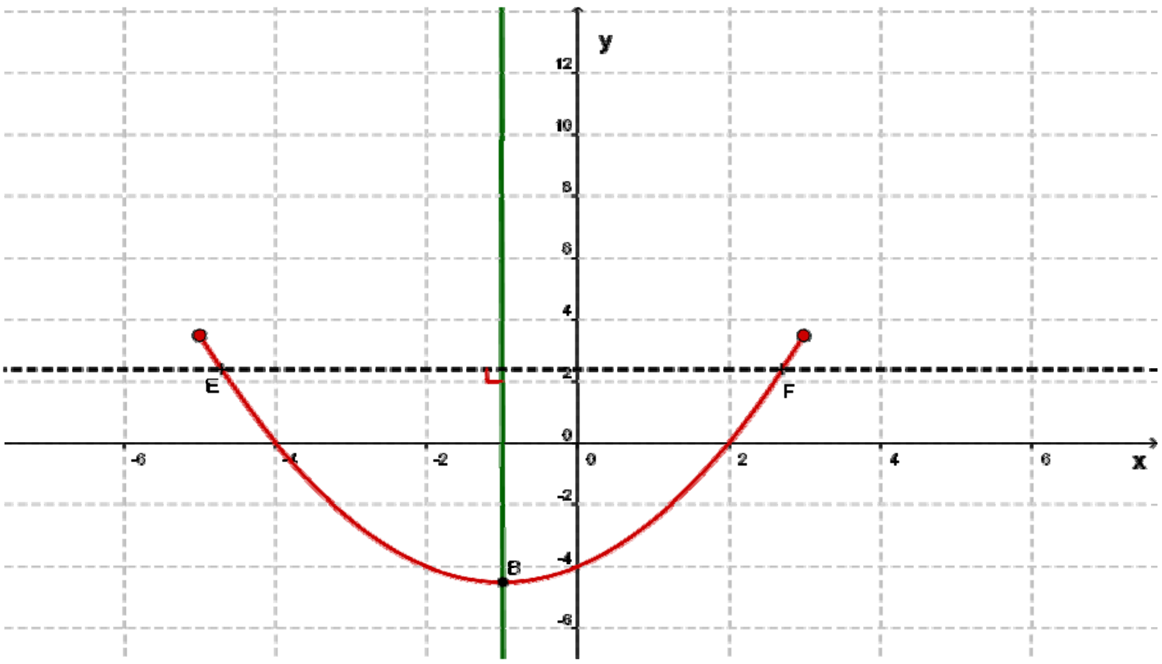
Question 3 : Tracer la courbe représentative de u. Peut-on affirmer que cette courbe possède un axe de symétrie ?

Question 1. $\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x^2+2x+1) - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = u(x)$.

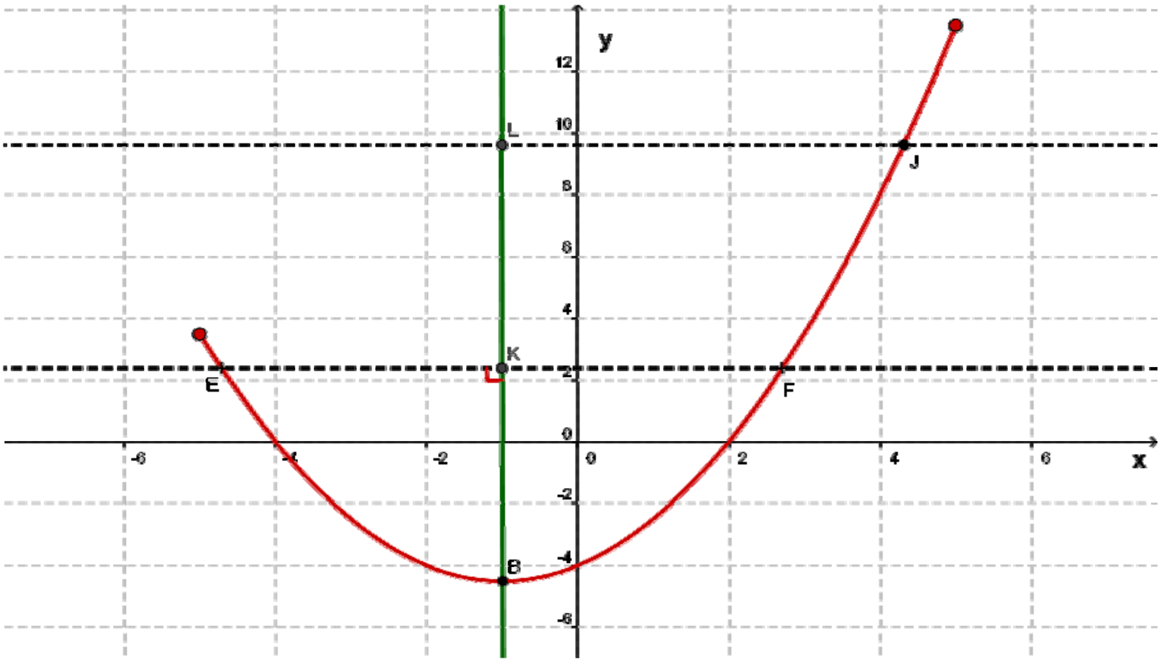
Question 2. D'après le cours ci-dessus, étant donné que , ½, coefficient du terme au carré, est strictement positif, le tableau de variations de u est :

x	-5	-1	5
$f(x)$	3,5 ↘	$-\frac{9}{2}$	↗ 13,5

Question 3. Pour répondre à cette question, on va tracer la courbe de u sur un intervalle centré en -1. Ici, on choisit l'intervalle $[-5;3]$.



Et voilà la fonction u de l'exercice-type :



Conclusion : **la courbe est symétrique si et seulement si l'intervalle où la fonction g est étudiée est symétrique par rapport à la valeur s, c'est-à-dire s'il existe un nombre k tel que l'intervalle d'étude de g est**

$$[\boldsymbol{m}\,;\boldsymbol{M}] = [\boldsymbol{s}-\boldsymbol{k}\,;\boldsymbol{s}+\boldsymbol{k}]$$

Dans l'exercice, la courbe de u est la seconde, la première n'est qu'une restriction à [-5 ;3] de la fonction u. La courbe de u n'est donc pas symétrique.

5) Démonstration :

Preuve. Pour tout x de l'intervalle d'étude, comme g(x)=a(x-s)²+h,

g(x)-h=a(x-s)². Graphiquement, cela montre que si l'on translate les points de la courbe de g avec la translation de vecteur de composantes (0 ;-h), alors on obtient la courbe de la fonction v qui à x associe a(x-s)².

De plus, v(x+s)=a((x+s)-s)²=ax^2. Graphiquement, cela montre que si l'on translate les points de la courbe de v avec la translation de vecteur de composantes (s ;0), alors on obtient la courbe de la fonction w qui à x associe ax^2.

Soit (x,y), un couple de coordonnées dans le repère du plan où seront tracées les courbes de u, v et w. En prenant comme unité graphique la longueur a sur l'axe des ordonnées, on obtient de nouvelles coordonnées (x,Y) telles que Y= y/a. Si le couple (x,y) vérifie y =a x^2, alors il s'agit des coordonnées d'un point de la courbe de w. Mais Y=y/a=a x^2/a= x^2. L'équation de la courbe de w devient alors Y= x^2.

La courbe de w est donc une parabole ou une partie de parabole, selon l'intervalle d'étude. La courbe de v et donc celle g, obtenue par translation de vecteur de composantes (-s ;h) à partir de celle de w, est une parabole aussi.

En ce qui concerne les variations, il suffit maintenant de remarquer que ce sont celles de la fonction carré, en tenant compte des modifications induites par la présence des paramètres a, s et h.
Si a est strictement positif, on n'a pas modifié le sens des axes de coordonnées en remplaçant les coordonnées (x,y) par (x,Y) où Y= y/a.
Donc la fonction w a les mêmes variations que celles de la fonction carré.

• Si a est strictement négatif, en remplaçant les coordonnées (x,y) par (x,Y) où Y= y/a, On a modifié le sens de l'axe des ordonnées. Dans ce cas, les variations de w sont les opposées de celles de la fonction carré.

Enfin la courbe de g est obtenue par translation de vecteur de composantes (-s ;h), les variations de g s'en déduisent :

• Si a est strictement positif, le minimum absolu de g est obtenu en s et vaut h, la fonction g décroît sur les domaines où x<s et croît sur les domaines où x>s.

Si a est strictement négatif, le maximum absolu de g est obtenu en s et vaut h, la fonction g croît sur les domaines où x<s et décroît sur les domaines où x>s.