Fonctions polynômes du second degré (généralités)

I) Introduction

On étudie dans cette fiche trois écritures différentes des fonctions polynômes du second degré.

FORME A :
ax² + bx + c où x est la variable et a, b et c sont des constantes fixées.

FORME B :
a(x-p)(x-q) où x est la variable et a, p et q sont des constantes fixées.

FORME C :
a(x-s)² + h où x est la variable et a, s et h sont des constantes fixées.

La FORME A est dite développée, réduite et ordonnée, la FORME B est dite factorisée, la FORME C est dite. canonique , c'est-à-dire « belle »,

Exemple. Voici une fonction polynôme de FORME B : f(x)=3(x - 1)(x + 2), avec a=3, p=1 et q=-2.

Voici une fonction polynôme de FORME C : g(x)=$3(x+\frac{1}{2})^2-\frac{27}{4}$ avec a=3, s=-1/2 et h=27/4.

Voici une fonction polynôme de FORME A : h(x)=$3x^2$ + $3x$ - 6 avec a=3, b=3 et c=-6.

Maintenant, on développe, on réduit et on ordonne les formes A et B :

f(x)=3(x- 1)(x + 2)=3(x^2 + 2 x - x - 2)=3(x ² + x - 2)=**3 x^2 + 3 x - 6.**

g(x)=$3(x+\frac{1}{2})^2-\frac{27}{4}=3\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{27}{4}=3x^2+3x+\frac{3}{4}-\frac{27}{4}=3x^2+3x-\frac{24}{4}$=**$3x^2$ + $3x$ - 6.**

Conclusion: **les trois fonctions polynômes f(x), g(x) et h(x) sont égales. Leurs écritures sont différentes.**

Ces trois écritures différentes servent à répondre à des questions différentes sur une même fonction polynôme.

Théorème :

Une fonction polynôme f quelconque du second degré s'écrit par définition sous la forme A

Une fonction donnée sous la forme A peut toujours être réécrite sous la forme C, et à certaines conditions sous la forme B.

Une fonction donnée sous la forme B peut toujours être réécrite sous forme C et sous la forme A.

Une fonction donnée sous la forme C peut toujours être réécrite sous la forme A et, à certaines conditions, sous la forme B.

Remarque. La forme B pose problème et n'est pas toujours accessible à partir des autres formes. Il n'est pas au programme de la classe de seconde de donner les conditions permettant l'écriture sous la forme B.

Explication et exemple : soit f(x)=a(x-p)(x-q) c'est-à-dire que f(x) est donné sous la forme B
On voit que l'équation f(x)=0 admet deux solutions p et q. En effet, f(p)=a(p-p)(p-q)=0 et f(q)=a(q-p)(q-q)=0.

Regardons maintenant la fonction polynôme particulière h(x)= x^2+1, donné sous la forme A avec a=1, b=0 et c=1. Comme x^2 est positif pour tout réel x, on voit que h(x)>0 pour tout réel x. Donc l'équation h(x)=0 n'a aucune solution. Donc h(x) ne peut pas s'écrire sous la forme B.

II) Choisir la meilleure forme

On traite cette partie sous la forme d'un exercice-type.
Il s'agit, à partir d'une fonction polynôme du second degré, d'en établir, si possible, les trois formes A, B et C. On pose ensuite des questions dont la réponse est la forme adaptée pour obtenir le résultat.

Exercice-type

Soit $\boldsymbol{f}$, la fonction définie sur [-3 ; 5] par :

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-(\boldsymbol{x}+2)(4\boldsymbol{x}+8)+(\boldsymbol{x}+2)(\boldsymbol{2x}+16)$.

Question 1. Montrer que $\boldsymbol{f}$ est une fonction polynômiale de degré 2.

Question 2. Montrer que pour tout $\boldsymbol{x}$ dans l'intervalle [-3,5],
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 18 - 2(\boldsymbol{x} - 1)^2$.

Question 3. Résoudre l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$.

Question 4. Combien vaut le maximum de $\boldsymbol{f}$ sur [-3 ;5] ? Pour quelle valeur de $\boldsymbol{x}$ est-il obtenu ?

Question 5. Etudier les variations de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur [-3 ; 5]

Question 6. La courbe de $\boldsymbol{f}$ admet-elle un axe de symétrie ? Si oui, en donner une équation.

Solution :

Question 1. Pour répondre à cette question, il suffit d'écrire $f(x)$ sous la forme ax^2 + bx + c avec a non nul. Donc, on développe, on réduit et on ordonne l'expression donnée pour f au début de l'énoncé. On trouve $f(x)$ = $-2x^2+4x+16$

Question 2. Il suffit de développer, réduire et ordonner l'expression
18 - 2(x - 1)², et de constater que l'on obtient le même résultat qu'à la question 1.
Effectivement : $18 - 2(x-1)^2 = 18 - 2(x^2-2x+1)$
$= 18 - 2x^2+4x-2$
$= 16 - 2x^2+4x$
$= -2x^2+4x+16$

Question 3. Il suffit de factoriser l'expression de f donnée au début de l'énoncé.
Le facteur commun étant $\boldsymbol{x} + 2$ On doit trouver $-2(x + 2)(x - 4)$.
Les solutions sont donc -2 et 4.

Question 4. Grâce à la question 2, on sait que $f(\boldsymbol{x}) = 18 - 2(x - 1)^2$.
il est facile de constater que la fonction admet un maximum en $x = 1$ qui vaut 18.

Question 5. Variation de . f :

x	-3	1	5
$f(x)$	-14 ↗	18	↘ -14

Question 6. Oui, car cette courbe est une branche de parabole et car la fonction f est définie sur [-3 ;5], intervalle symétrique par rapport à la valeur 1 qui est l'abscisse du sommet de la parabole, ce que nous savons grâce à la question 2.