Probabilité sur un ensemble fini

I) Loi de probabilité sur un ensemble fini

1) Définitions

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle possède plusieurs résultats et que l'on peut ni prévoir à l'avance, ni calculer lequel de ces résultats va être réalisé.

Exemples

a) Lancer un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est une expérience aléatoire.
b) Lancer une pièce de monnaie est une expérience aléatoire.
c) Choisir un jeton dans un sac contenant 5 jetons rouges et 3 blancs et noter sa couleur est une expérience aléatoire.

Chaque résultat d'une expérience aléatoire est appelé issue (ou encore éventualité) de cette expérience.
L'ensemble formé par les issues d'une expérience aléatoire est appelé univers de cette expérience.

Exemples :

Pour les expériences précédentes on a :

a) 6 issues pour un lancer de dé (1, 2, 3, 4, 5, 6) donc l'univers E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
b) 2 issues pour le lancer d'une pièce PILE ou FACE donc l'univers E = { PILE , FACE }
c) 2 issues pour la couleur du jeton choisi ROUGE ou BLANC donc l'univers E = { ROUGE, BLANC }

Etablir une loi de probabilité sur un univers E d'une expérience aléatoire comportant n issues, c'est associer à chaque issue x_i (i variant de 1 à n), un nombre positif ou nul p_i de telle façon que :

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue x_i .

Exemples :

1) Soit une expérience aléatoire d'univers E = { a, b, c }
On peut définir une loi de probabilité sur E en associant les nombres p_1 = 0,2 à l'issue a, p_2 = 0,1 à l'issue b et p_3 = 0,7 à l'issue c.

2) Soit une expérience aléatoire d'univers E = { 1, 3, 4, 7, 9 }
On peut définir une loi de probabilité telle que les probabilités des chiffres impairs soient toutes égales et que la probabilité d'un chiffre pair soit le double de la probabilité d'un celle d'un chiffre impair.

On note p_n la probabilité associée au chiffre n

Ainsi on doit avoir $p_1 = p_3 = p_7 = p_9$; $p_4 = 2p_1$ et $p_1 + p_3 + p_4 + p_7 + p_9 = 1$

Par substitution la dernière égalité devient $6\,p_1 = 1$ d'où $p_1 = \frac{1}{6}$

On a donc $p_1 = p_3 = p_7 = p_9 = \frac{1}{6}$ et $p_4 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2) Définition – Propriété

Soit une expérience aléatoire d'univers E contenant n issues.
Dans le cas où l'on associe à chaque issue la même probabilité p on dit que la loi de probabilité définie est une loi équirépartie.

On a alors $p = \frac{1}{n}$

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à choisir une carte dans un jeu de 32 cartes.
L'univers de cette expérience contient donc 32 issues.
Définir une loi équirépartie sur cet ensemble revient à associer à chaque issue la probabilité $p = \frac{1}{32}$

II) Modélisation d'une expérience aléatoire

1) Définition

Modéliser une expérience aléatoire dont les issues constituent l'ensemble E, c'est choisir une loi de probabilité sur E qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Exemples :

1) Lorsqu'on lance une pièce bien équilibrée, on peut penser que l'on a autant de chances qu'elle retombe sur pile que sur face, donc il apparaît comme naturel de choisir une loi équirépartie pour modéliser cette expérience. Ainsi $p_{\text{PILE}} = \frac{1}{2}$ et $p_{\text{FACE}} = \frac{1}{2}$

2) Lorsqu'on joue avec un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on peut penser que chacun des numéros à autant de chances d'apparaître sur la face supérieure, dont il semble logique de choisir une loi équirépartie comme modèle.

Ainsi $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$

3)Si on extrait un jeton d'un sac contenant 5 jetons blancs et 10 jetons rouges (tous indiscernables au toucher), on peut penser que l'on 2 fois plus de chances d'extraire un jeton rouge qu'un jeton blanc. On pourra donc choisir de modéliser l'expérience par la loi de probabilité : $p_{\text{ROUGE}} = \frac{2}{3}$ et $p_{\text{BLANC}} = \frac{1}{3}$

2) Propriété

On admettra que pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, la fréquence de réalisation de chaque issue se rapproche de sa probabilité lorsque le nombre de fois où on réalise l'expérience devient grand.