Fiches Méthodes

Bien lire l'énoncé 2 fois avant de continuer - Méthodes et/ou Explications Réponses

Traduction algébrique des extrêmums d'une fonction

Méthode / Explications :

f est une fonction définie sur un intervalle I.

• M est le maximum de f sur l'intervalle I s'il existe un nombre a appartenant à I tel que $f(a) = M$ et pour tout x appartenant à I : $f(x) \leq$ M

• m est le minimum de f sur l'intervalle I s'il existe un nombre b appartenant à I tel que $f(b) = m$ et pour tout x appartenant à I : $f(x) \geq$ m

Exercice 1 . Soit f la fonction définie sur [-3 ; 3] par la fonction $f(x) = x^2$. Montrer que 0 est un minimum de f sur l'intervalle : [-3 ; 3].

Réponse :

Pour tout x de l'intervalle [-3 ; 3], $x^2 \geq 0$ (Un carré est toujours positif) et $f(0) = 0$
De là : $f(x) \geq f(0)$ pour tout x dans [-3 ; 3]

La fonction f admet donc un minimum qui est 0 atteint en $x = 0$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [-2 ; 2] par la fonction $f(x) = -4x + 5$

Montrer que 13 est le maximum de f sur l'intervalle : [-2 ; 2].

Réponse :

Méthode 1 :

Pour tout x dans [-2 ; 2] on a : $x \geq$ -2

• On multiplie les deux membres de l'inégalité par -4, on change donc son sens : $-4x \leq$ 8.

• On ajoute 5 aux deux membres de l'inégalité :$-4x + 5 \geq$ 8 + 5

On obtient : $-4x + 5 \leq$ 13. Donc $f(x) \leq$ 13

Or $f(-2) = 13$

De là : $f(x) \leq f(-2)$ sur [-2 ; 2].

La fonction f admet donc un maximum qui est 13 atteint en $x = -2$.

Méthode 2 :

La fonction f est une fonction affine de coefficient directeur négatif : elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur [-2 ; 2].

Pour $x \geq$ -2 $f(x) \leq f(-2)$ et $f(-2) = 13$ donc sur [-2 ; 2], $f(x) \leq$ 13

La fonction f admet donc un maximum qui est 13 atteint en $x = -2$.

Exercice 3 .f est une fonction définie sur l'intervalle [-5 ; 6] dont le tableau de variation est ci-dessous :

x	-5		-2		1		3		4		6
$f(x)$	-3	↗	2	↘	0	↗	5	↘	-1	↗	2

a) Donner le maximum et le minimum de f sur [-5 ; 6]

b) Donner le maximum et le minimum de f sur [-2 ; 3]

c) Donner le maximum et le minimum de f sur [1 ; 6]

d) Donner le maximum et le minimum de f sur [0 ; 2]

e) Donner un encadrement de f sur [-5 ; 6]

f) Donner un encadrement de f sur [0 ; 2]

Réponse :

a) Sur [-5 ; 6], la plus grande valeur est 5 et la plus petite est -3. Donc sur l'intervalle [-5 ; 6], le maximum de f est 5 et le minimum de f est -3.

b) Sur [-2 ; 3], la plus grande valeur est 5 et la plus petite est 0. Donc sur l'intervalle [-2 ; 3], le maximum de f est 5 et le minimum de f est 0.

c) Sur [1 ; 6], la plus grande valeur est 5 et la plus petite est -1. Donc sur l'intervalle [1 ; 6], le maximum de f est 5 et le minimum de f est -1.

d) Sur [0 ; 2], nous n'avons pas assez d'information sur f pour donner son maximum, le minimum de f sur cet intervalle est 0.

e) D'après la question a) sur [-5 ; 6] on a :
$-3 \leq f(x) \leq 5$

($-200 \leq f(x) \leq 5\,000$ est vrai aussi !!!)

f) Là on peut répondre, sur [0 ; 2] :
$0 \leq f(x) \leq 5$

Exercice 4 . f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Montrer que f n'a pas d'extremum sur cet intervalle.

Réponse :

Lorsque $x \in\ ]0\ ;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{x} \in\ ]0\ ;+\infty[$, et dans ce cas la fonction f n'admet pas d'extremum sur cet intervalle.

En effet f est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

En 0 :

• Si M était un maximum de f sur $]0\ ;+\infty[$, alors

$0 < \dfrac{1}{x} = f(x) \leq M$ pour tout $x \in\ ]0\ ;+\infty[$.

Mais c'est absurde car $f(\dfrac{1}{2M}) = 2M > M$.

• Si m était un minimum de f sur $]0\ ;+\infty[$,

alors il existerait $x_m \in\ ]0\ ;+\infty[$ tel que $f(x_m) = m$ et $x_m > 0$, donc $m > 0$,

mais $f(\dfrac{2}{m}) = \dfrac{m}{2} < m$. Ce qui est absurde aussi.