Fiches Méthodes

Bien lire l'énoncé 2 fois avant de continuer - Méthodes et/ou Explications Réponses

Traduction algébrique du sens de variation d'une fonction

Méthode / Explications :

• Une fonction f est croissante sur un intervalle I si :
Pour tous réels u et v appartenant à I tels que
$u \leq v$ alors $f(u) \leq f(v)$ (La fonction croissante conserve l'ordre)

• Une fonction f est décroissante sur un intervalle I si :
Pour tous réels u et v appartenant à I tels que
$u \leq v$ alors $f(u) \geq f(v)$ (La fonction décroissante change l'ordre)

Exercice 1 .Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-5 ; 5] par : $f : x \longmapsto 4x + 3$
Prouver algébriquement que la fonction f est croissante sur cet intervalle.

Réponse :

Soit u , v appartenant à [-5 ;5]

Si $u \leq v$

Alors 4u $\leq$ 4 v (car multiplier par un nombre strictement positif les termes d'une inéquation n'en change pas le sens).

Alors 4u + 3 $\leq$ 4 v + 3 (Car additionner un nombre à chaque terme d'une inéquation n'en change pas le sens)

Donc $f(u) \leq f(v)$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle [-5 ; 5].

Remarque : Cette fonction étant affine avec un coefficient directeur positif, elle est donc croissante.

Exercice 2 .Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-5 ; 5] par : $f(x) = 2x^2 - 1$
Prouver algébriquement que la fonction f est croissante sur [0 ; 5] et décroissante sur [-5 ; 0]

Réponse :

Soit u, v appartenant à $[-5; 5]$.

Supposons que $u \leq v$.

• Si $u \leq v \leq 0$, comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$, alors $u^2 \geq v^2$.

Puis, multiplier par un nombre strictement positif les termes d'une inéquation n'en change pas le sens, donc $2u^2 \geq 2v^2$.

Enfin, additionner un nombre à chaque terme d'une inéquation n'en change pas le sens, donc $2u^2 - 1 \geq 2\,v^2 - 1$, donc $f(u) \geq f(v)$.

f est donc strictement décroissante sur $[-5; 0]$.

• Si $0 \leq u \leq v$, comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors $u^2 \leq v^2$.

Puis, multiplier par un nombre strictement positif les termes d'une inéquation n'en change pas le sens, donc $2u^2 \leq 2v^2$.

Enfin, additionner un nombre à chaque terme d'une inéquation n'en change pas le sens, donc $2u^2 - 1 \geq 2v^2 - 1$, donc $f(u) \leq f(v)$.

f est donc strictement croissante sur $[0;5]$.

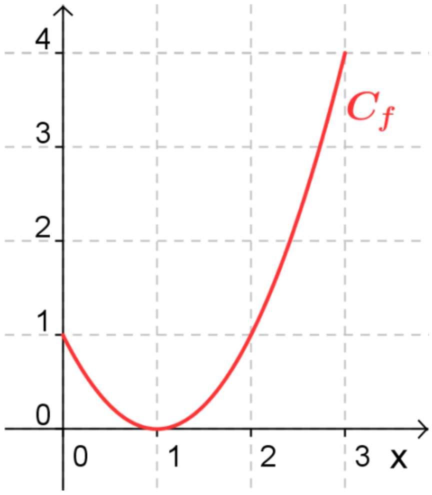
Exercice 3 .

a) Peut-on affirmer qu'une fonction non croissante sur un intervalle I est décroissante sur I? Illustrer à partir d'un graphique.

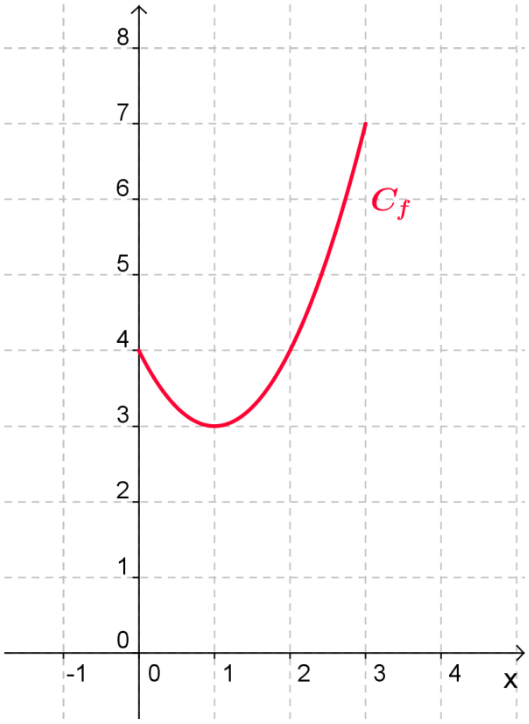
b) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 4$ sur [0 ; 2]
Sachant que $f(0) = 4$ et $f(1) = 3$. Peut-on affirmer que cette fonction est décroissante sur [0 ; 2] ?

Réponse :

Une fonction non croissante sur un intervalle I, ne veut pas dire qu'elle est décroissante, voici un exemple à partir d'un graphique :



a) La fonction f ci-contre n'est pas croissante sur l'intervalle [0 ; 3]. Pourtant elle n'est pas non plus décroissante sur ce même intervalle !!!!
Elle est décroissante sur [0 ; 1] puis croissante sur [1 ; 3] Elle n'est tout simplement pas monotone.



b) 0 < 1 et $f(0) > f(1)$ cela ne veut pas pour autant dire que la fonction f est décroissante sur [0 ; 3].Même si l'ordre est changé, sa représentation graphique ci-contre, nous montre que cette fonction est décroissante sur [0 ; 1] puis croissante sur [1 ; 3]. L'ordre n'est pas changé, pour toutes les valeurs.

Exercice 4 .f est une fonction définie sur l'intervalle [-5 ; 6] dont le tableau de variation est ci-dessous :

x	-5		-2		1		3		4		6
$f(x)$	-3	↗	2	↘	0	↗	5	↘	-1	↗	2

1) Décrire le sens de variation de f

2) Comparer lorsque cela est possible :

a) $f(-2{,}5)$ et $f(-2{,}1)$ b) $f(-1)$ et $f(0)$ c) $f(1{,}5)$ et $f(3{,}5)$ d) $f(3)$ et $f(-3)$

Réponse :

1) La fonction f est croissante sur l'intervalle [-5 ; -2] , elle est décroissante sur [-2 ; 1] puis croissante sur [1 ; 3] puis de nouveau décroissante sur [3 ;4] et enfin croissante sur [4 ; 6]

2) a) -2,5 et -2,1 appartiennent à l'intervalle [-5 ; -2]

f est croissante sur cet intervalle :

-2,5 < -2,1 donc $f(-2,5) < f(-2,1)$ (l'ordre est conservé)

b) -1 et 0 appartiennent à l'intervalle [-2 ; 1]

f est décroissante sur cet intervalle :

-1 < 0 donc $f(-1) > f(0)$ (l'ordre est changé)

c) On ne peut pas comparer $f(1,5)$ et $f(3,5)$ car la fonction n'est pas monotone sur cet intervalle. Nous n'avons aucune information nous permettant de dire si $f(1,5)$ est plus grand ou non que $f(3,5)$

d) -3 ∈]-5 ; -2 [d'après le tableau de variation on en déduit que : -3 < $f(-3)$ < 2 et $f(3)$ = 5 donc $f(-3) <\ f(3)$