Sens de variation et extremum de fonctions à partir d'un graphique

1) Sens de variation et tableau de variation à partir d'un graphique

Méthode / Explications :

a) Sens de variation d'une fonction :

• Une fonction f est croissante sur un intervalle I:
Lorsque les abscisses x augmentent sur I, les ordonnées $f(x)$ augmentent aussi.
On dira, par commodité et bien que ce soit un abus de langage, que la courbe « monte »lorsqu'on la parcourt dans le sens des abscisses croissantes .

• Une fonction f est décroissante sur un intervalle I:
Lorsque les abscisses x augmentent sur I, les ordonnées $f(x)$, au contraire, diminuent.
On dira, par commodité et bien que ce soit un abus de langage, que la courbe « descend »lorsqu'on la parcourt dans le sens des abscisses croissantes.

• Une fonction f est constante : Lorsque quel que soit l'abscisse x, l'ordonnée $f(x)$ a toujours la même valeur

b) Tableau de variation d'une fonction :

• Les variations d'une fonction f peuvent se résumer dans un tableau de variation, où l'on indique uniquement si la fonction est croissante, décroissante ou constante selon la méthode suivante :

• Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de f et dans la seconde les variations de f: on lit les flèches de gauche à droite :
- La flèche « monte » lorsque la fonction est croissante,
- Elle « descend », lorsque la fonction f est décroissante,
- Et elle est horizontale lorsque f est constante.

• A chaque extrémité des flèches, on indique les valeurs atteintes par la fonction f, dans le cas où aucune extrémité ne correspond à une valeur interdite, qui est marquée d'une double barre

Si l'extrémité de la flèche correspond à une double barre, deux cas sont possibles :

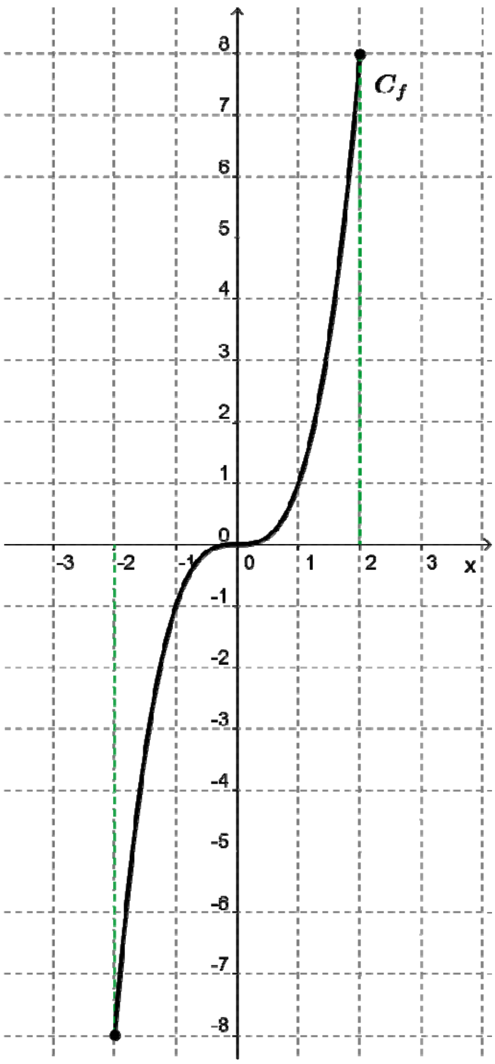
- Soit la courbe de la fonction fournie peut être complétée par un point, comme dans l'exercice 4 et dans ce cas on met la valeur de l'ordonnée de ce point (C'est le cas où le domaine de définition est un intervalle ouvert ou semi-ouvert borné)

- Soit la courbe ne peut être complétée par un point. C'est le cas de la fonction inverse en 0 (voir l'exercice 6), dans ce cas on ne met rien.

Fiches Méthodes

Bien lire l'énoncé 2 fois avant de continuer - ▌ Méthodes et/ou Explications ▌ Réponses

Exercice 1 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
1) Décrire les variations de la fonction
2) Dresser son tableau de variation



Réponse :

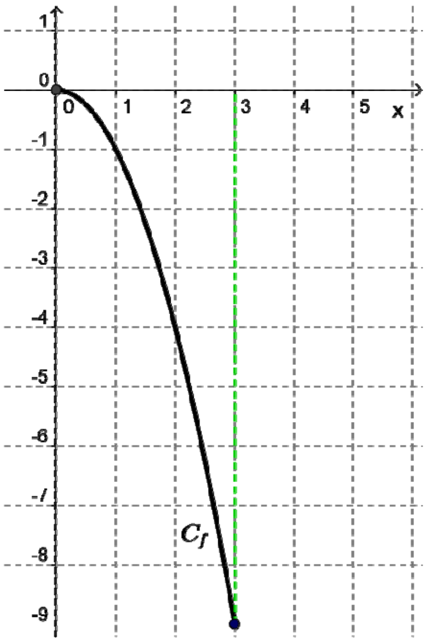
1) La fonction f est définie sur l'intervalle [-2 ; 2].Nous observons que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées augmentent aussi .Cette fonction est donc croissante sur cet intervalle

2). La fonction f est croissante sur l'intervalle [-2 ; 2]. On va donc, dans le tableau de variation, tracer une flèche qui « monte ».Les valeurs de la fonction augmentent de -8 à 8.

On obtient donc le tableau de variation:

x	**-2**		**2**
$f(x)$	**-8**	↗	**8**

Exercice 2 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
1) Décrire les variations de la fonction f
2) Dresser son tableau de variation



Réponse :

1) La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 3]

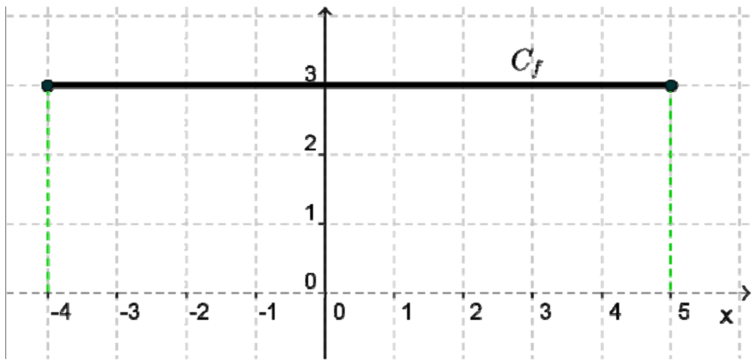
Nous observons que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées eux diminuent .Cette fonction est donc décroissante sur cet intervalle

2) La fonction f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 3]. On va donc, dans le tableau de variation, tracer une flèche qui « descend ».Les valeurs de la fonction diminuent de 0 à -9.

On obtient donc le tableau de variation:

x	**0**	**3**
$f(x)$	**0** ↘	**-9**

Exercice 3 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
1) Décrire les variations de la fonction
2) Dresser son tableau de variation



Réponse :

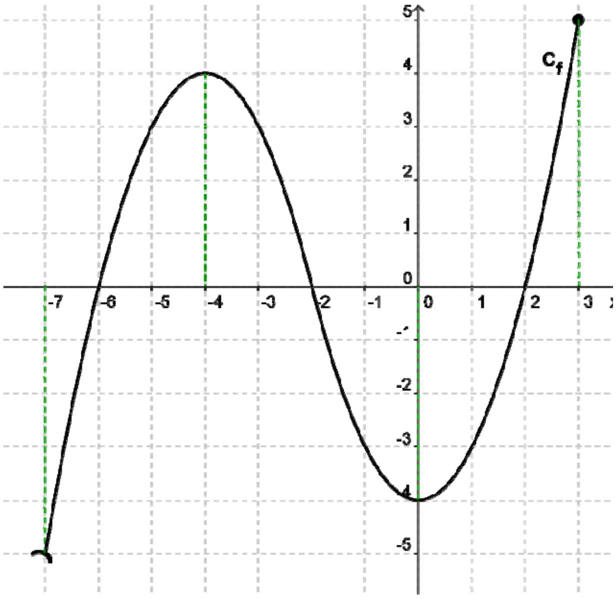
1) La fonction f est définie sur l'intervalle
[-4 ; 5]
La courbe est une droite horizontale, donc chacun de ses points a pour ordonnée 3.

Elle est donc constante sur cet intervalle

2) Son tableau de variation est donc :

x	-4		5
$f(x)$	3	→	3

Exercice 4 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
1) Décrire les variations de la fonction
2) Dresser son tableau de variation



Réponse :

1) La fonction f est définie sur l'intervalle
]-7 ; 3]

Nous observons que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées augmentent aussi sur l'intervalle]-7 ; -4]. Cette fonction est donc croissante sur cet intervalle. Nous observons ensuite, que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées eux diminuent .Cette fonction est donc décroissante sur l'intervalle [-4 ; 0] Puis elle est de nouveau croissante sur l'intervalle [0 ; 3] (pour les mêmes raisons que citées précédemment)

Conclusion : La fonction f est donc croissante sur les intervalles]7 ; 4] et [0 ; 3] et décroissante sur l'intervalle
[-4 ; 0]

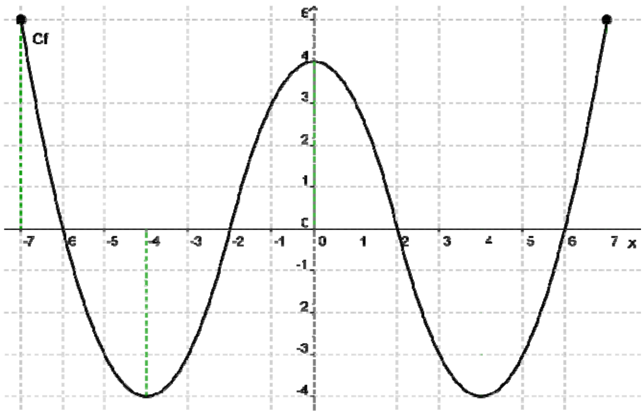
2) Son tableau de variation est donc :

x	-7		-4		0		3
$f(x)$	‖ -5	↗	4	↘	-4	↗	5

Attention la fonction n’est pas définie en -7 il ne faut pas oublier la double barre

Exercice 5 : A partir de la courbe représentative d’une fonction f tracée ci-dessous :

1) Décrire les variations de la fonction f
2) Dresser son tableau de variation



Réponse :

1) La fonction f est définie sur l’intervalle [-7 ; 7]

Nous observons que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées eux diminuent sur [-7 ; -4].Cette fonction est donc décroissante sur l’intervalle [-7 ; -4]. Nous observons ensuite, que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées augmentent aussi sur l’intervalle [-4 ; 0]. Cette fonction est donc croissante sur cet intervalle. Puis elle est de nouveau décroissante sur l’intervalle [0 ; 4] (pour les mêmes raisons que citées précédemment) et de nouveau croissante sur l’intervalle [4 ; 7]

Conclusion : La fonction f est donc décroissante sur les intervalles [-7 ; -4] et [0 ; 4] et croissante sur les intervalles [-4 ; 0] et [4 ; 7]

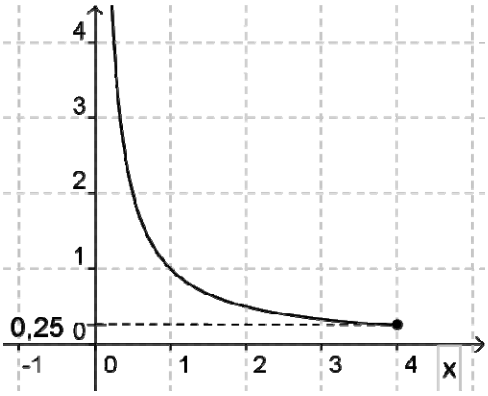
2) Son tableau de variation est donc :

x	-7		-4		0		4		7
$f(x)$	5	↘	-4	↗	4	↘	-4	↗	5

Exercice 6 : Nous avons tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction inverse (voir leçon) sur un intervalle I

1) Décrire les variations de la fonction f.

2) Dresser son tableau de variation



Réponse :

1) La fonction f est définie sur l'intervalle]0 ; 4]

Nous observons que lorsque les abscisses augmentent, les ordonnées eux diminuent Cette fonction est donc décroissante sur cet intervalle

2) La fonction f est décroissante sur l'intervalle]0 ; 4]. On va donc, dans le tableau de variation, tracer une flèche qui « descend ».Les valeurs de la fonction diminuent jusqu'à $\frac{1}{4}$ soit 0,25

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	**0**		**4**
$f(x)$	‖	↘	$\frac{1}{4}$

On met une double barre car La fonction n'est pas définie en 0

Lorsque x est proche de 0, tout en restant positif, alors $\frac{1}{x}$ prend des valeurs indéfiniment grandes. Nous ne pouvons donc pas mettre de valeur en 0

2) Extremum d'une fonction à partir d'un graphique

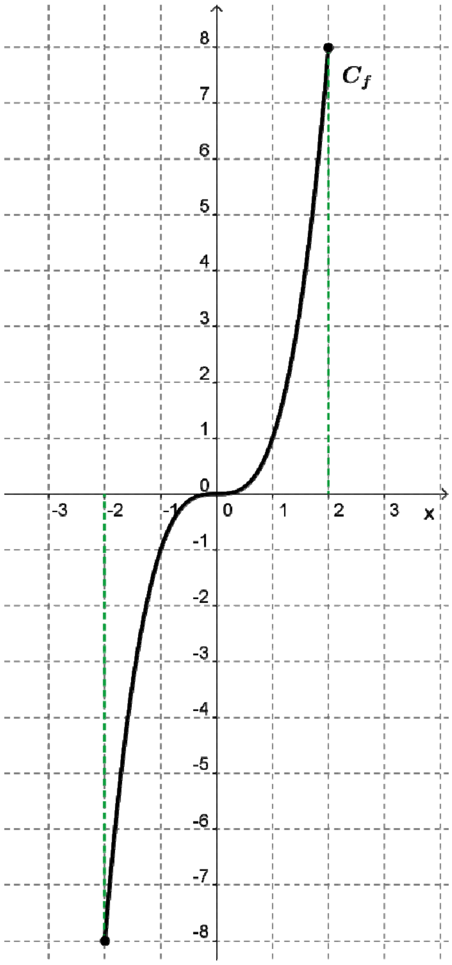
Méthode / Explications :

• Le maximum d'une fonction f sur un intervalle I est la plus grande valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.

• Le minimum d'une fonction f sur un intervalle I est la plus petite valeur atteinte par cette fonction sur cet intervalle.

• Un extremum d'une fonction f sur un intervalle I est un maximum ou un minimum de cette fonction f sur l'intervalle. I.

Exercice 1 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
Déterminer les extremums de cette fonction :



Réponse :

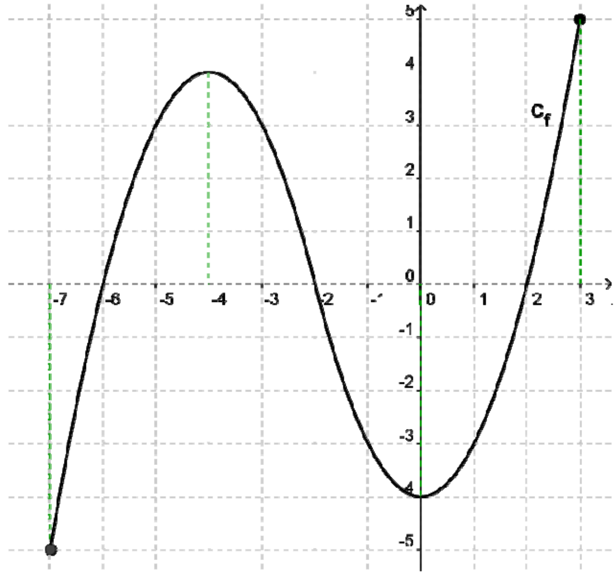
La plus grande valeur de la fonction f est 8 , la plus petite est -2.

La fonction f admet en 2 un maximum qui est 8

La fonction f admet en -2 un minimum qui est -8

Fiches Méthodes

Exercice 2 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
Déterminer les extremums de cette fonction :



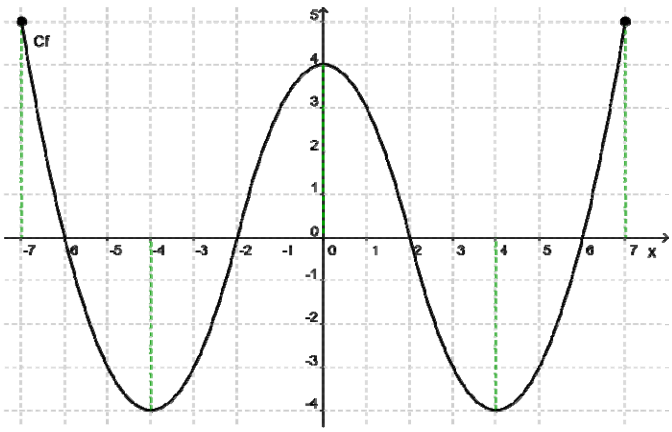
Réponse :

La plus grande valeur de la fonction f est 5, la plus petite est -5.

La fonction f admet en 3 un maximum qui est 5

La fonction f admet en -7 un minimum qui est -5

Exercice 3 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
Déterminer les extremums de cette fonction :



Réponse :

La plus grande valeur de la fonction f est 5, la plus petite est -4.

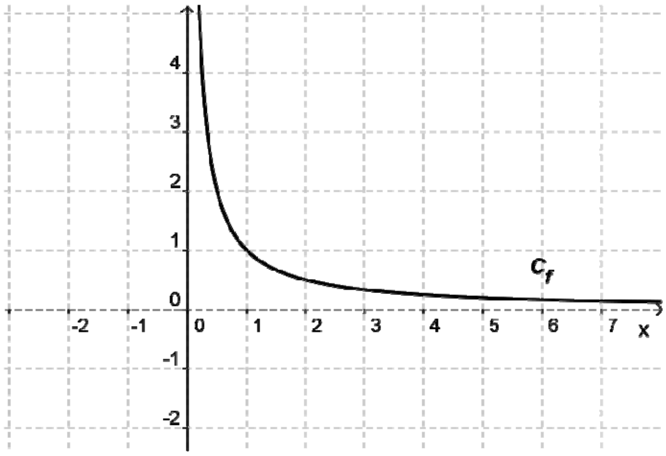
La fonction f admet en -7 et en 7 un maximum qui est 5

La fonction f admet en -4 et en 4 un minimum qui est -4

Fiches Méthodes

Bien lire l'énoncé 2 fois avant de continuer - ▌ Méthodes et/ou Explications ▌ Réponses

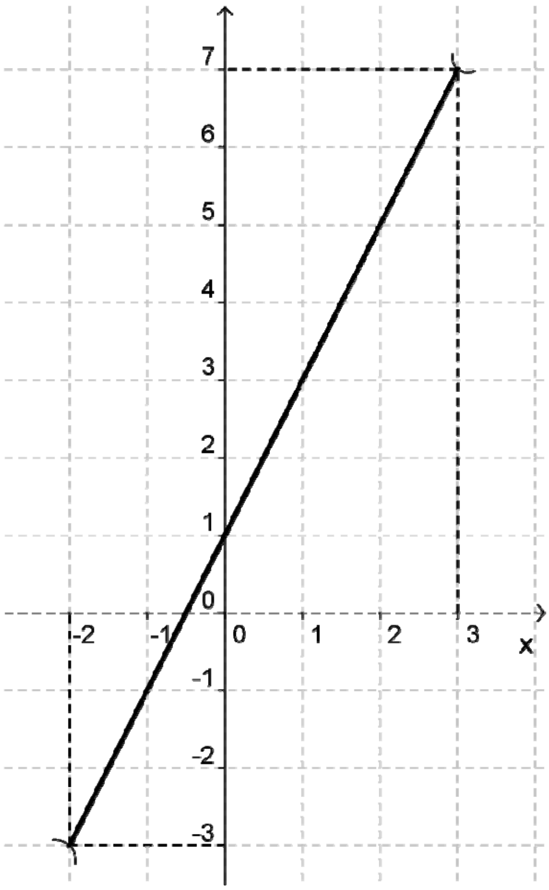
Exercice 4 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
Que peut-on dire du maximum de la fonction f ?



Réponse :

La fonction f n'a pas de maximum.
Elle n'est pas définie en 0

Exercice 5 : A partir de la courbe représentative d'une fonction f tracée ci-dessous :
Que peut-on dire des extremums de la fonction f ?



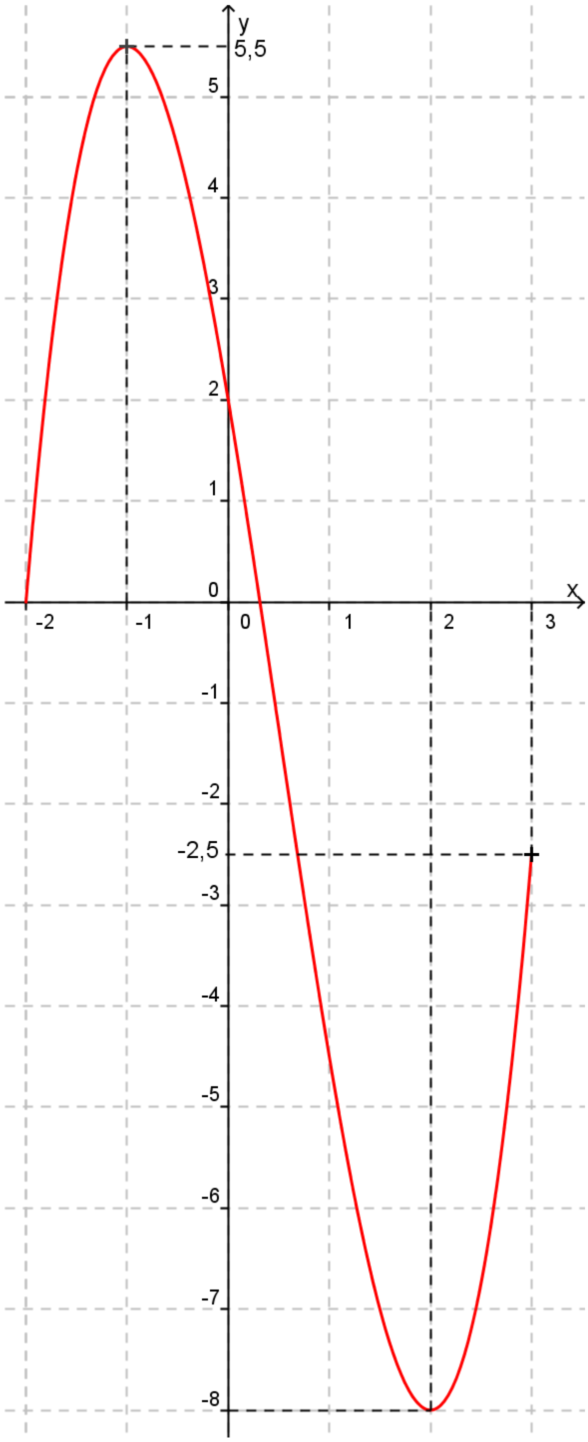
Réponse :

La fonction f est d définie sur
] -2 ; 3[et on a : -2 < $f(x)$ < 7
Les inégalités sont strictes , f n'a
donc pas d'extremum sur] -2 ; 3[

3) Récapitulatif sous forme d'exemple

A partir de la courbe représentative de la fonction f tracée ci-dessous :

1) Décrire les variations de la fonction,
2) Dresser son tableau de variation.
3) Quels sont les extremums de cette fonction ?



Réponse :

1)
• La fonction f est croissante sur l'intervalle [-2 ;-1]
• La fonction f est décroissante sur l'intervalle [-1 ; 2]
• La fonction f est croissante sur l'intervalle [2 ; 3]

x	-2		-1		2		3
$f(x)$	0	↗	5,5	↘	-8	↗	-2,5

3) La plus grande valeur prise par f sur l'intervalle [-2 ; 3] est 5,5.
Donc f admet en -1 un maximum qui est 5,5

La plus petite valeur prise par f sur l'intervalle [-2 ; 3] est -8.
Donc f admet en 2 un minimum qui est -8