Les Fonctions numériques (Généralités)

Table des matières

1 Fonction numérique

La notion de fonction n'est pas toujours facile à saisir. Elle fait appel à de nombreux domaines des mathématiques : théorie des ensemble, équation, inéquation, géométrie, ...
Le mot fonction pour « l'homme de la rue » a plusieurs sens, le sens qui se rapproche le plus de la définition mathématique est la locution « être fonction de » qui signifie « dépendre de ». En mathématique une fonction fait appel à deux quantités dont l'une dépend de l'autre par une relation que l'on appelle « fonction ».

> *Une fonction est donc une relation qui existe entre deux quantités, telle que la variation de la première entraîne une variation correspondante de la seconde*
>
> NICOLAS CHUQUET mathématicien français(1445-1488)

Dans la théorie moderne une fonction est une relation entre deux ensembles A (ensemble de départ) et B (ensemble d'arrivé) qui à un élément x de l'ensemble de départ associe un unique élément y de l'ensemble d'arrivé. Cet élément y est donc « fonction de » x que l'on note alors $y = f(x)$. Cette relation particulière, car à un élement x, elle fait correspondre un et un seul élément y, est aussi appelé en mathématique « application ». Application et fonction sont donc deux synonymes, et leur emploi n'est alors qu'affaire de goût.

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle **fonction numérique**, une relation qui à un réel x, appelé **variable**, associe un et un seul réel y. On note alors : $y = f(x)$.

$$\begin{array}{rlll} f : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{« } f \text{ est définie de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ »} \\ & x \longmapsto y = f(x) & & \text{« à } x \text{ on associe } y \text{ tel que y est égal à } f \text{ de } x \text{ »} \end{array}$$

On dit alors que :
- y est **l'image** de x par la fonction f
- x est **un antécédent** de y par la fonction f.

Remarque : Il y a une différence entre f qui est une relation et $f(x)$ qui est un réel. Par abus de langage, on confond parfois les deux, car une fonction est souvent définie par son image. Il est important cependant, dans un premier temps de ne pas confondre f et $f(x)$.

Exemples : La façon la plus simple de définir une fonction est de définir l'image de la variable x de façon explicite :

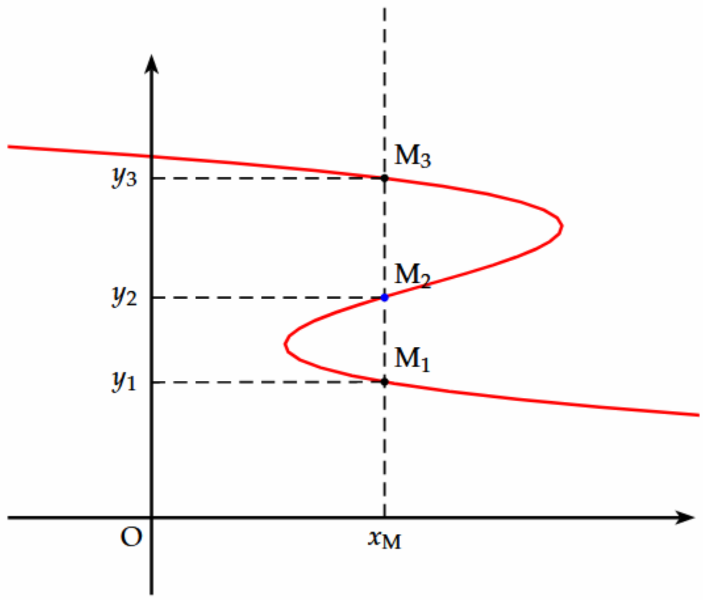
1) $f(x) = 3x + 4$ qui est une fonction affine

2) $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$ qui est une fonction du second degré

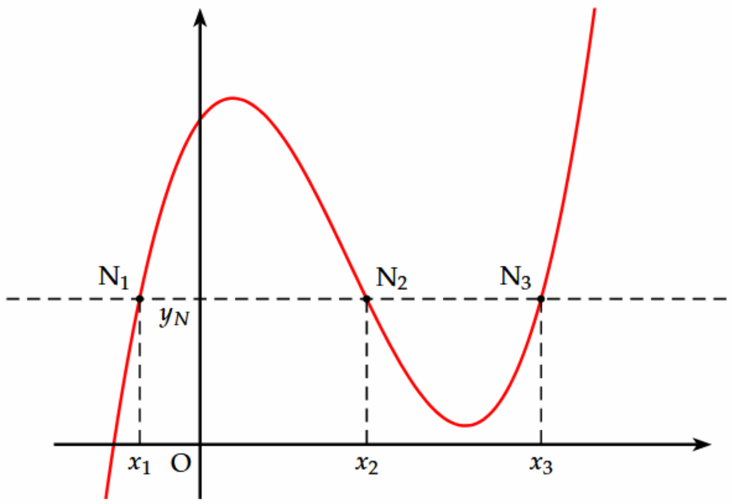
3) $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$ qui est une fonction homographique.

On remarquera que la fonction h n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ car si $x = -3$ la fonction h n'a pas d'image. La fonction h est définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$

On peut définir une fonction par une courbe. Cependant toute les courbes ne représentent pas une fonction car une valeur de x ne peut avoir qu'une seule image y. Voici une courbe qui n'est pas une fonction. En effet un x donné est en relation avec 3 images :



Par contre pour une image y, il peut y avoir éventuellement plusieurs antécédents comme le montre la représentation de la fonction suivante :



Courbe représentant une fonction : image unique avec antécédents multiples

1.2 Comment calculer une image ?

Voici quelques exemples pour calculer une image. Reprenons les fonctions f, g et h définies précédemment :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad h(x) = \frac{2x-5}{x+3}$$

- Image de 2 et -1 par la fonction f, on remplace x par les valeurs considérées :

$$f(2) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10 \quad \text{on a donc} \quad f(2) = 10$$
$$f(-1) = 3(-1) + 4 = -3 + 4 = 1 \quad \text{on a donc} \quad f(-1) = 1$$

- Images de 4 et -2 par la fonction g.

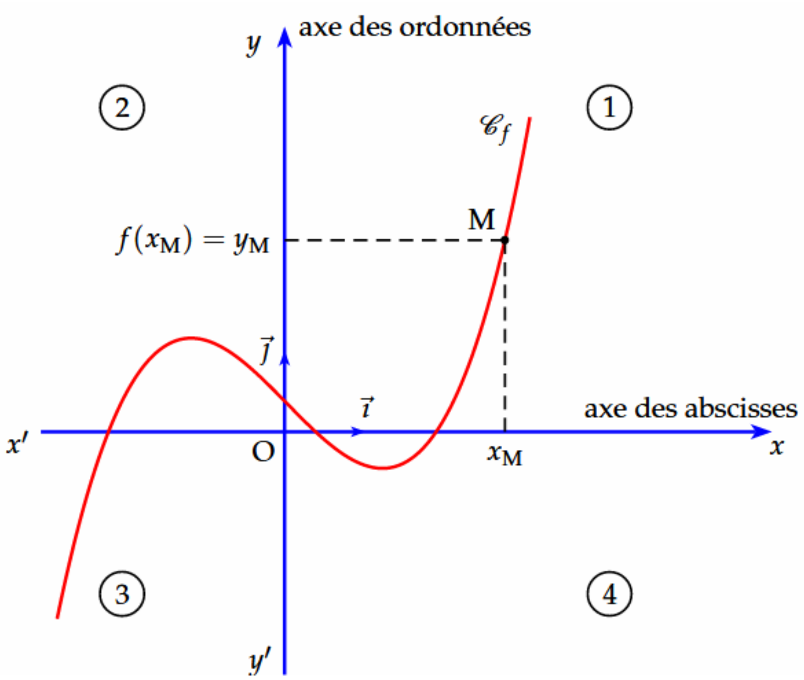
$$g(4) = 3(4)^2 + 2(4) - 3 = 3(16) + 8 - 3 = 53 \quad \text{on a donc} \quad g(4) = 53$$
$$g(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 3 = 3(4) - 4 - 3 = 5 \quad \text{on a donc} \quad g(-2) = 5$$

- Images de 3 et 0 par la fonction h

$$h(3) = \frac{2(3)-5}{3+3} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{on a donc} \quad h(3) = \frac{1}{6}$$
$$h(0) = \frac{2(0)-5}{0+3} = \frac{-5}{3} \quad \text{on a donc} \quad h(0) = \frac{-5}{3}$$

1.3 Représentation graphique

Définition 2 : La représentation graphique d'une fonction est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ lorsque x varie sur $\mathbb{R}$.
Cette représentation s'appelle la courbe représentative de la fonction f notée $\mathscr{C}_f$



- L'axe horizontal $(x'Ox)$ s'appelle l'axe des **abscisses**[1]

1. Ce mot est emprunté au latin moderne abscissa (*linea*) qui signifie "ligne coupée" du latin *abscissus*, participe passé de *abscidere* (i.e. "couper"), de *ab* (à) et de *caedere* (ciseau). Il semblerait que ce soit Leibniz qui, le premier, en 1692, introduisit ce mot (ainsi que les 2 autres mais sur ce point, les avis divergent puisque certains dictionnaires étymologiques attribuent la première utilisation de "ordonnée" à B. Pascal.). Newton utilise abscisse en 1686.

- L'axe vertical $y'Oy$ s'appelle l'axe des **ordonnées**[2]

Nous travaillerons dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
- **orthonormal**[3] : Deux axes de même unité perpendiculaires. Ce repère est utilisé lorsque x et y ont le même ordre de grandeur.
- **orthogonal**[4] : Deux axes perpendiculaires ayant des unités différentes sur les deux axes. Ce repère est utilisé lorsque x et y ont des ordres de grandeur différent. C'est souvent le cas dans des cas concrets.

Le repère est partagé en 4 zones : les cadrans 1, 2, 3, 4 sont indiqués sur le repère ci-dessus.

Pour déterminer un point de la courbe, il faut donc connaître une image. Pour tracer la courbe, un ordinateur ou une calculatrice graphique calcule un grand nombre d'images. Il relie ensuite les points en les *lissant*. Cependant si la variation de la fonction est très grande, il peut parfois donner une image de la courbe erronée. De plus, il trace la courbe dans un système d'unités qui lui permet de placer tous les points mais qui peut entraîner une mauvaise vision de la courbe. Il est donc nécessaire d'étudier la courbe pour en connaître les propriétés et les endroits remarquables.

Exemples : Reprenons les exemples de fonctions :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad h(x) = \frac{2x - 3}{x + 3}$$

- $f(2) = 10$ et $f(-1) = 1$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par les points $(2 ; 10)$ et $(-1 ; 1)$.
- $g(4) = 53$ et $g(-2) = 5$ donc $\mathscr{C}_g$ passe par les points $(4 ; 53)$ et $(-2; 5)$.
- $h(3) = \dfrac{1}{6}$ et $h(0) = -\dfrac{5}{3}$ donc $\mathscr{C}_h$ passe par les points $\left(3 ; \dfrac{1}{6}\right)$ et $\left(0 ; -\dfrac{5}{3}\right)$.

Remarque : La représentation graphique d'une fonction est la traduction en géométrie de la relation algébrique qu'est une fonction. Cette représentation permet de visualiser cette relation et permet ainsi d'avoir une compréhension plus intuitive de la notion de fonction. C'est aussi une autre façon de définir une fonction.
Il faut cependant faire la différence entre fonction f et sa représentation $\mathscr{C}_f$.
La branche mathématique qui traite des fonctions s'appelle l'**analyse**.

2 Résolution graphique

Le but de ce paragraphe est de faire un inventaire des réponses que peut donner une représentation d'une fonction : variation et extremum, résolution d'équations ou d'inéquation, signe d'une fonction ...

2. Ordonnée est attesté en 1639 pour désigner la coordonnée verticale servant à définir la position d'un point. Peut-être parce que la droite était déjà perçue comme un ensemble ordonné. Ordonnée semblerait être issue d'un texte de Descartes qui parlait de droites "menées d'une manière ordonnée" ainsi que de "lignes droites appliquées par ordre" (ordinatim applicatae) depuis la "ligne coupée" (linea abscissa, c'est-à-dire l'axe des abscisses). Le mot ordonnée est utilisé par Pascal en 1658.

3. Normal : du latin *norma*, règle, équerre en prenant le sens d'équerre.En toute logique, le mot *orthonormal* est donc un pléonasme (et incorrect puisqu'un mélange d'une racine grecque et d'une racine latine). Il vaudrait mieux parler d'un repère *orthonormé*.

4. Orthogonal : du grec ortho, droit et gonia, angle.

Ce sera aussi l'occasion de définir mathématiquement les différents termes utilisés avec les fonctions.

Enfin cela permet de faire un lien avec les deux chapitres précédents : équation et inéquation dans $\mathbb{R}$ que nous avons traité algébriquement et qui trouve ici un autre éclairage avec une résolution graphique.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;\,2,5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

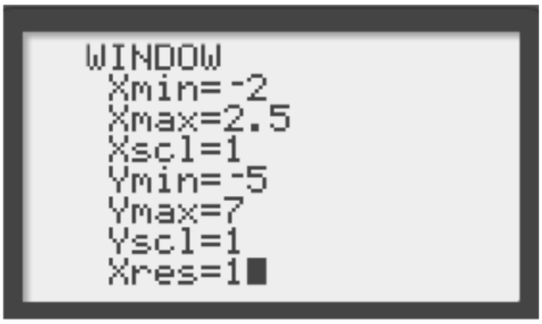
Toute la suite de ce paragraphe on fera référence à cette fonction

2.1 Tracer la fonction sur une calculette

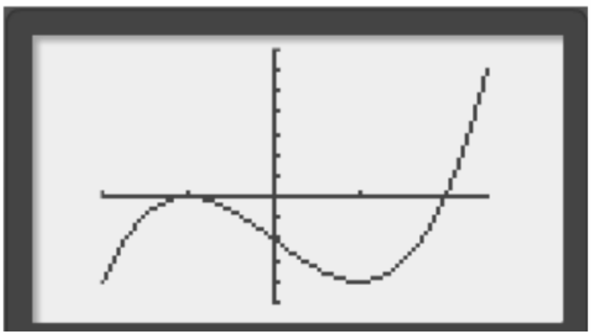
- On rentre une fonction sur la Ti82 stats grâce à la touche (f(x))
  On écrit la fonction Y_1 avec la touche (x,t,θ,n) pour la variable X. On valide à la fin avec la touche (entrer)

$$Y_1 = X\hat{}3 - 3X - 2$$

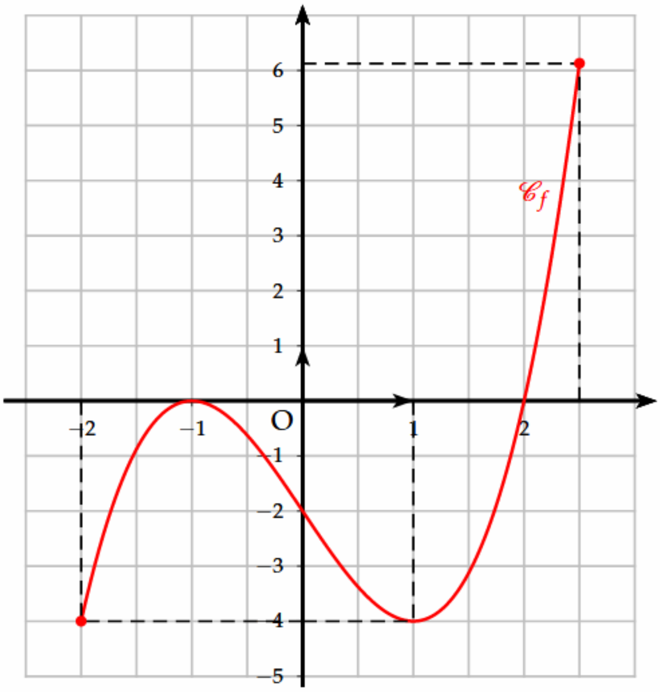
- On règle ensuite la fenêtre avec la touche (fenêtre). On valide les valeurs avec la touche (entrer)



- On appuie sur la touche (graphe) et l'on obtient :



Pour une meilleur lecture voici la courbe $\mathscr{C}_f$:

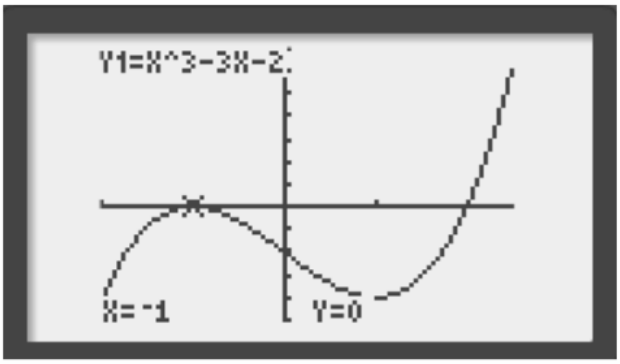


2.2 Lire des images

Lire les images des points : $-2, -1, 0, 1, 2, 2{,}5$

On trouve par lecture sur l'axe des ordonnées : $f(-2) = -4$, $f(-1) = 0$, $f(0) = -2$, $f(1) = -4$, $f(2) = 0$, $f(-2{,}5) = 6{,}125$.

Avec la calculette, étant dans le graph, on appuie sur la touche (trace). On voit apparaître un curseur que l'on peut déplacer avec le flèches ◀ ▶ (gauche, droite). En bas de l'écran sont écrit les valeurs de l'abscisse X et de l'ordonnée Y du point.



2.3 Tableau de variation

Étudier les variations d'une fonction f, revient à savoir sur quels intervalles la fonction est croissante ou décroissante.

Définition 3 : Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I si, et seulement si, x et $f(x)$ varient dans le même sens, c'est à dire :

$$\forall a \in \mathrm{I},\ \forall b \in I \quad \text{tel que si} \quad a < b, \quad \text{on a} \quad f(a) < f(b)$$

Une fonction f est **décroissante** sur I si, et seulement si, x et $f(x)$ varie dans le sens contraire, c'est à dire :

$$\forall a \in I,\ \forall b \in \mathrm{I} \quad \text{tel que si} \quad a < b, \quad \text{on a} \quad f(a) > f(b)$$

Remarque : Une fonction croissante ne change pas l'inégalité tandis qu'une fonction décroissante inverse l'inégalité.

On consigne les variations de la fonction f dans un **tableau de variation**. Une fonction croissante est représentée par un flèche montante et une fonction décroissante par un flèche descendante. On renseigne sur le tableau les valeurs extrêmes que prend la fonction. Pour notre fonction, on obtient la tableau de variation suivant :

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4 ↗	0 ↘	-4 ↗	6,125

2.4 Résolution d'équations

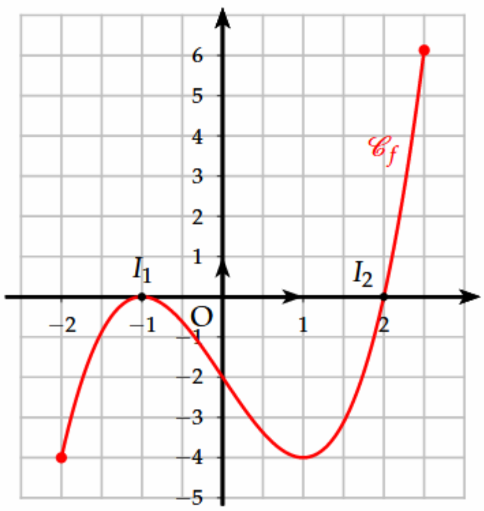
Règle 1 : Pour résoudre graphiquement $f(x) = a$:

- on trace la droite horizontale $y = a$
- on recherche les points d'intersection de la droite horizontale avec la courbe de la fonction f
- on détermine les abscisses de ces points d'intersection qui sont les solutions de l'équation

Résoudre graphiquement : $f(x) = 0$

- On cherche les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
- On trouve deux points d'intersection I_1 et I_2
- On trouve les deux solutions en lisant les abscisses correspondantes aux point I_1 et I_2. On trouve alors

$$S = \{-1\,;\,2\}$$



Remarque : La résolution graphique de $f(x) = 0$ revient à trouver des valeurs approchées des solutions de l'équation : $x^3 - 3x - 2 = 0$

Ti 82 stats :

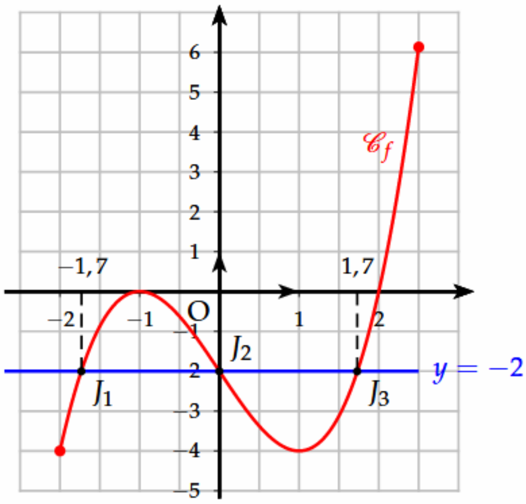
- On appuie sur (graphe) puis sur [calculs]. On choisit le menu 1 : *Zero*. On positionne le curseur sur la courbe à gauche du point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses , on valide avec (entrer), on positionne le curseur sur la courbe après le point d'intersection puis on valide deux fois avec (entrer). On réitère le processus autant de fois qu'il y a des points d'intersection.
  On trouve alors les deux solutions :

$$X_1 = -1, \quad X_2 = 2$$

Résoudre graphiquement : $f(x) = -2$

- On trace la droite $y = -2$
- On trouve trois points d'intersection J_1, J_2 et J_3 entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $y = -2$.
- On reporte les abscisses des trois points. On trouve alors trois solutions (on prend les valeurs approchées).

$$S = \{-1{,}7\,;\,0\,;\,1{,}7\}$$



Remarque : La résolution graphique de $f(x) = -2$ revient à trouver des valeurs approchées des solutions de l'équation : $x^3 - 3x - 2 = -2$

Ti 82 stats :

- On rentre la droite $y = -2$ en appuyant sur (f(x)) : $Y_2 = -2$.
- On appuie sur (graphe) puis sur [calculs]. On choisit le menu 5 : *Intersect*. On positionne le curseur de la courbe 1 avant le point d'intersection, on valide avec (entrer), on positionne le curseur sur la courbe 2 (ici la droite) avant le point d'intersection puis on valide deux fois avec (entrer). On réitère le processus autant de fois qu'il y a des points d'intersection.
  On trouve alors les trois solutions :

$$X_1 = -1{,}732\,051, \quad X_2 = 1{,}88 \times 10^{-14} \simeq 0 \quad X_3 = 1{,}732\,050\,8$$

Algébriquement : Dans le cas, on peut résoudre algébriquement :

$$x^3 - 3x - 2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

On obtient alors les solutions exactes : $x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_2 = 0$ ou $x_3 = \sqrt{3}$

2.5 Résolution d'inéquations

Règle 2 : Pour résoudre les inéquations : $f(x) > a$ ou $f(x) \geqslant a$.

- On trace la droite horizontale $y = a$.
- Les solutions sont les abscisses des points qui sont **au dessus** de la droite $y = a$ et éventuellement sur celle-ci.

Pour résoudre les inéquations : $f(x) < a$ ou $f(x) \leqslant a$.

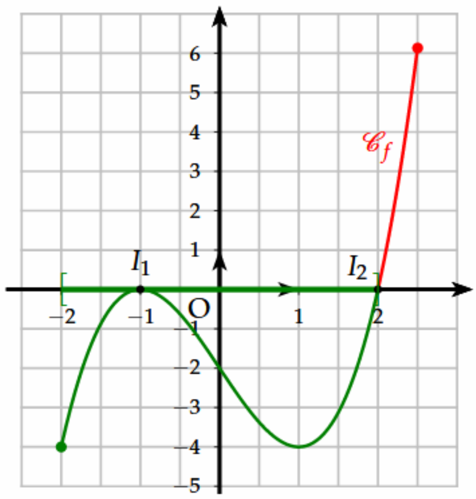
- On trace la droite horizontale $y = a$.
- Les solutions sont les abscisses des points qui sont **en dessous** de la droite $y = a$ et éventuellement sur celle-ci.

Résoudre graphiquement : $f(x) \leqslant 0$

Les abscisses des points qui sont au dessous et sur la droite des abscisses sont solutions.

On trouve comme solution :

$$S = [-2\,;\,2]$$



Remarque : Si l'on avait eu à résoudre $f(x) < 0$, les points sur la droite des abscisses ne sont plus solution. Il faut donc enlever les nombres -1 et 2. La solution sera donc :

$$S = [-2\,;\,-1[\,\cup\,]-1\,;\,2[$$

Pour l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, on trouve l'intervalle $[2\,;\,2,5]$ auquel il faut rajouter le nombre -1. On obtient donc comme solution :

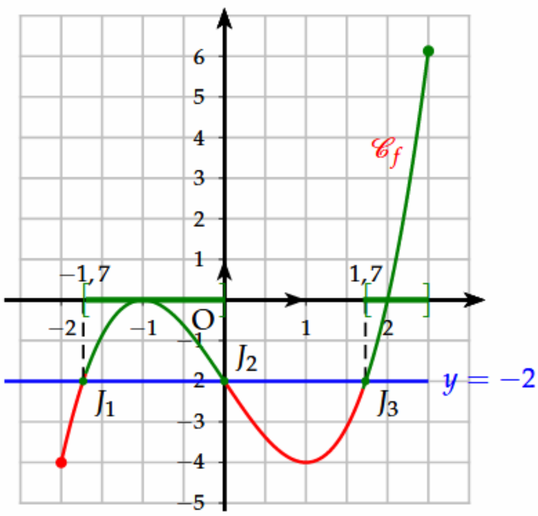
$$S = \{-1\} \cup [2\,;\,2,5]$$

Résoudre graphiquement : $f(x) \geqslant -2$

- On trace la droite $y = -2$.
- On prend alors les abscisses des points qui sont au dessus et sur cette droite. Deux intervalles sont possibles :

  On trouve alors comme solutions :

  $$S = [-1,7\,;\,0] \cup [1,7\,;\,2,5]$$



Algébriquement : On retrouve ce résultat en résolvant l'inéquation :

$$x^3 - 3x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \geqslant 0$$

On fait un tableau de signes :

x	-2		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2,5
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On trouve alors : $S = [-\sqrt{3}\,;\,0] \cup [\sqrt{3}\,;\,2,5]$

2.6 Déterminer le signe d'une fonction

Lorsque l'on cherche graphiquement le signe d'une fonction f, on recherche les abscisses des points qui sont au dessus de l'axe des abscisse ($f > 0$) et les points qui sont en dessous ($f < 0$). On présente, en général, les résultats sous forme d'un tableau de signes. Pour notre fonction, on trouve :

x	-2		-1		2		2,5
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	