Vecteurs – Droites – Colinéarité

Table des matières

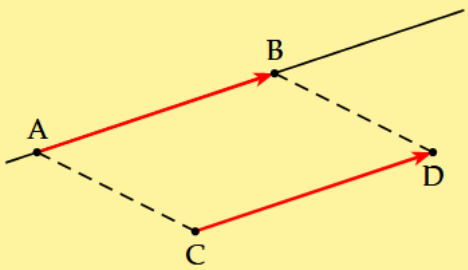
1 Rappels sur les vecteurs

1.1 Définition

Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une direction (la droite (AB)).
- un sens (de A vers B)
- Une longueur : la norme du vecteur $\|\vec{u}\|$ ou AB

Égalité de deux vecteurs
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.



1.2.1 Somme de deux vecteurs

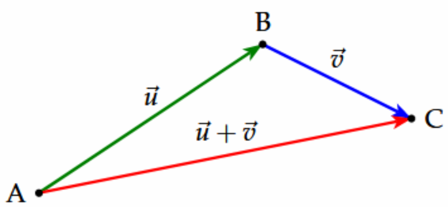
La somme de deux vecteurs est définie par la relation de chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Cette relation permet de décomposer un vecteur.

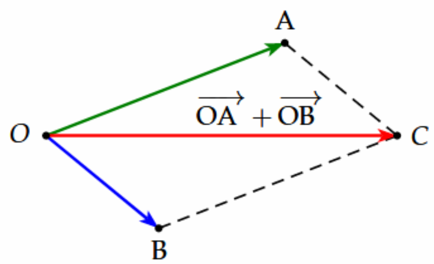
On a l'inégalité triangulaire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$



Construction de la somme de deux vecteurs de même origine.

On effectue un parallélogramme, afin de reporter le deuxième vecteur permettant d'appliquer la relation de Chasles.



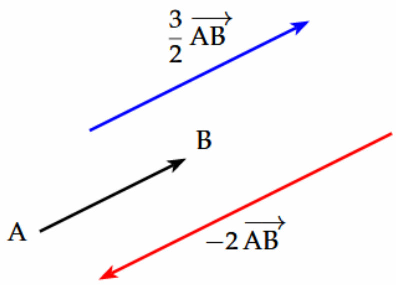
Propriété 1 : La somme de deux vecteurs :

- Est commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- Possède un élélment neutre $\vec{0}$: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- tout vecteur possède un opposé $-\vec{u}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

1.2.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Lorsqu'on multiplie un vecteur par un réel k, appelé scalaire, le vecteur ainsi formé $k\vec{u}$ est tel que :

- Sa longueur est multiplié par $|k|$
- Si $k>0$ son sens est inchangé
- Si $k<0$ son sens est inversé.
- Si $k=0$ on a : $0\,\vec{u}=\vec{0}$



Propriété 2 : **Bilinéarité.** La multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs ou la somme de deux réels.

- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{v}$

1.3 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 2 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que : $\vec{v}=k\vec{u}$

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur car : $\vec{0}=0\,\vec{u}$

Propriété 3 : La colinéarité permet de montrer le parallélisme et l'alignement.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) // (CD)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B, C alignés

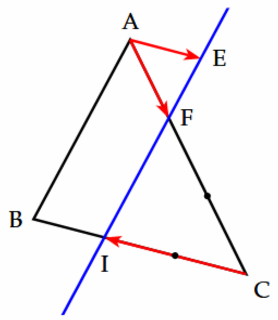
Exemple : Voir figure ci-contre :

Soit ABC un triangle, E, I et F tels que :

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que I, E et F sont alignés



Exprimons $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

  On en déduit que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BI}$ donc que AEIB est un parallélogramme. On a alors : $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AB}$

- De plus : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

On en déduit alors : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et donc les points E, F et I sont alignés.

1.4 Géométrie analytique

Propriété 4 : Mis à part les calculs de distance qui exige un repère orthonormé, les formules suivantes sont valable dans tout repère.

- Soit deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\quad ;\quad y_B - y_A)$$
- Soit deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, les coordonnées du milieu I du segment [AB] vérifient :
$$I = \left(\frac{x_B + x_A}{2}\quad ;\quad \frac{y_B + y_A}{2}\right)$$
- On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$, le nombre :
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est égale à 0
$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$
- Dans un repère orthonormal, la norme d'un vecteur $\vec{u}$ et la distance entre les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ vérifient :
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemples : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) Soit $A(1\,;\,4)$ et $B(-5\,;\,2)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ de $I = m[AB]$ et la longueur AB

$\overrightarrow{AB} = (-5-1\,;\,2-4) = (-6\,;\,-2)$ et $I = \left(\frac{1-5}{2}\,;\,\frac{4+2}{2}\right) = (-2\,;\,3)$

$AB = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

2) On donne $\vec{u}(2\,;\,3)$ et $\vec{v}(3\,;\,4)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$. Comme $\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \neq 0$ les vecteurs ne sont pas colinéaires.

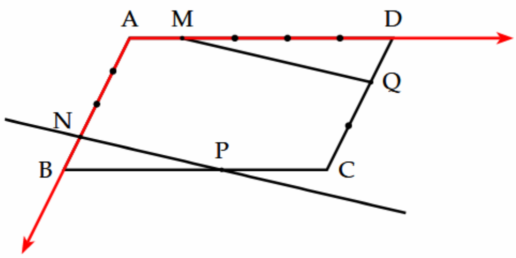
Dans un repère quelconque

ABCD est un parallélogramme. M, N, Q sont tels que :
$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA},\quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe BC en P. Déterminer le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$.

Faisons une figure, en prenant comme repère $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$:
D'après l'énoncé les coordonnées de M, N et Q sont :

$$\mathrm{M}\left(0; \frac{1}{5}\right), \quad \mathrm{N}\left(\frac{3}{4}; 0\right), \quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{3}; 1\right)$$



P est sur (BC), son abscisse est 1.

De plus comme k est tel que : $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, son ordonnée vaut k.
Les coordonnées de P sont : $\mathrm{P}(1; k)$

Comme (NP) // (MQ), le déterminant de $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ est nul, on a :

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{MQ}}, \overrightarrow{\mathrm{NP}}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - 0 & 1 - \frac{3}{4} \\ 1 - \frac{1}{5} & k - 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{k}{3} - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}$$

2 Équation cartésienne d'une droite

2.1 Vecteur directeur

Définition 3 : Soit une droite d définie par deux points A et B. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Remarque : Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique, car 2 points quelconques de la droite définissent un vecteur directeur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite d, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On a donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple : Soit la droite (AB) définie par : $\mathrm{A}(3\,;-5)$ et $\mathrm{B}(2\,;\,3)$

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), on alors :

$$\vec{u} = (2-3\,;\,3-(-5)) = (-1\,;\,8)$$

Théorème 1 : Une droite est entièrement définie si l'on connaît un point A et une vecteur directeur $\vec{u}$.

Démonstration : La démonstration est immédiate car à partir du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$, on peut déterminer un autre point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème 2 : Toute droite d du plan peut être déterminée par une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec a et b non tous les deux nuls.
Une telle équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d.

Réciproquement une équation du type $ax + by + c = 0$ définie une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;\,a)$

Démonstration : Soit la droite d passant par le point $A(x_A ; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

Soit un point quelconque $M(x ; y)$ de la droite d. On a alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires. Leur déterminant est alors nul. On a : $\overrightarrow{AM} = (x - x_A ; y - y_A)$, donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

On pose $c = -(ax_A + by_A)$, on a donc : $ax + by + c = 0$

Réciproquement : Soit l'équation $ax + by + c = 0$. Deux cas peuvent se présenter

- $a = 0$ ou $b = 0$, on obtient respectivement $y = -\dfrac{c}{b}$ et $x = -\dfrac{c}{a}$ qui sont respectivement une droite horizontale et une droite verticale.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ on peut déterminer deux points de cette équation en prenant respectivement $x = 0$ et $y = 0$. On obtient alors les points $A\left(0 ; -\dfrac{c}{b}\right)$ et $B\left(-\dfrac{c}{a} ; 0\right)$ on obtient alors le vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{c}{a} ; \dfrac{c}{b}\right)$. Vérifions que ce vecteur $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}(-b ; a)$

$$\det(\overrightarrow{AB} ; \vec{u}) = \begin{vmatrix} -\dfrac{c}{a} & -b \\ \dfrac{c}{b} & a \end{vmatrix} = -c + c = 0$$

Exemple : Soit la droite d définie par les point $A(2 ; 3)$ et $\vec{u}(-2 ; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

En posant $M(x ; y)$, on a :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - 2 & -2 \\ y - 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2) + 2(y - 3) = 0$$

$$x + 2y - 2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 8 = 0$$

⚠ L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients par un facteur k non nul. Par exemple, on peut trouver pour la droite de l'exemple : $-2x - 4y + 16 = 0$ en multipliant par (-2).

2.3 Équation réduite d'une droite

Théorème 3 : Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$ appelée équation réduite de d. Le vecteur $\vec{u}(1 ; m)$ est un vecteur directeur de d