

Probabilité conditionnelle. Variable aléatoire

Table des matières

1	Loi de probabilité	2
1.1	Définitions	2
1.2	Opérations sur les événements	2
1.3	Probabilité	4
1.4	Loi équiprobable	5
2	Probabilité conditionnelle	7
2.1	Définition	7
2.2	Représentation par un arbre pondéré	7
2.3	Événements indépendants	9
3	Variable aléatoire	10
3.1	Définition	10
3.2	Espérance, variance et écart-type	11
3.3	Simulation en Python	12

1 Loi de probabilité

Il s'agit de construire une **structure mathématique** qui permet de repérer des situations identiques et d'avoir une **méthode rigoureuse** dans un domaine où notre intuition nous conduit souvent à la solution sans apporter de justifications satisfaisantes.

1.1 Définitions

Expérience aléatoire : Protocole précis dont on ne peut prévoir l'issue mais qui peut être vérifiée.

Exemples :

- Lancer un dé à 6 faces sur une piste de jeu.
- Lancer une pièce de monnaie.
- Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
- Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

Univers : Ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note : Ω .

On a alors : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Exemples :

- Il y a 6 issues possibles pour un dé : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Il y a 2 issues possibles pour une pièce de monnaie : $\Omega = \{F; P\}$
- Il y a 201 376 mains possibles de 5 cartes pour un jeu de 32 cartes
- Il y a 1 200 lycéens dans l'échantillon qui peuvent être interrogés.

Événement : Sous ensemble de l'ensemble univers Ω . On le note avec une majuscule.

Exemples :

- A : « Obtenir un nombre pair avec un dé. » d'où $A = \{2, 4, 6\}$
- B : « Obtenir "face" avec une pièce. » d'où $B = \{F\}$
- C : « Obtenir 2 cœurs dans une main de cinq cartes. »
- D : « Obtenir un lycéen âgé de moins de 17 ans. »

Événement élémentaire : Événement qui ne contient qu'un seul élément. On le note alors e_i .

Exemples :

- e_6 : « Obtenir un "six" avec un dé »
- e_i : « Interroger le lycéen i parmi les 1 200 lycéens »

Événement certain : C'est l'univers, Ω .

Événement impossible C'est l'ensemble vide, \emptyset .

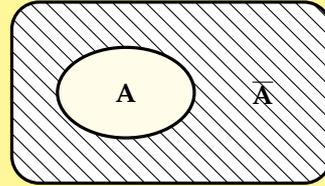
1.2 Opérations sur les événements

L'étude des probabilités fait appel à la logique mathématique : il s'agit d'analyser, dans un texte les éléments qui serviront aux calculs de probabilités. Les mots à repérer sont les conjonctions "et", "ou", et la négation "ne... pas" La logique mathématique fait aux opérations sur les ensembles. On définit les opérations élémentaires suivantes : le complémentaire, l'intersection et l'union. D'autres opérations peuvent se décomposer à l'aide de ces trois opérations de base.

1.2.1 Événement contraire

Définition 1 : L'événement contraire d'un événement A est l'événement noté \bar{A} composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \in \Omega \text{ et } x \notin A$$

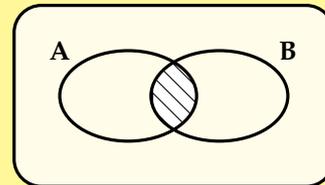


Exemple : On lance un dé parfait. On appelle A l'événement « obtenir un 6 ». On a donc l'événement contraire \bar{A} l'événement « ne pas obtenir 6 ».

1.2.2 Intersection de deux événements

Définition 2 : L'intersection de deux événements A et B est l'événement noté $A \cap B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A et à B .

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$



Les événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si : $A \cap B = \emptyset$

Exemple : On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements

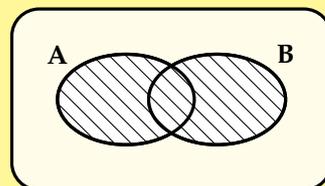
- A : « obtenir deux cœurs »
- B : « obtenir au moins une dame »

L'événement $A \cap B$ est donc : « obtenir la dame de cœur et un autre cœur »

1.2.3 Union de deux événements

Définition 3 : L'union de deux événements A et B est l'événement noté $A \cup B$ composé des éléments de Ω qui appartiennent à A ou (non exclusif) à B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$



A et \bar{A} forment une **partition** de Ω car : $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Exemple : On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Soient les événements

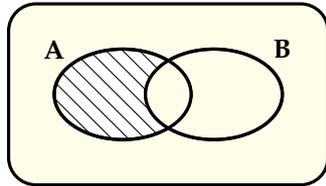
- A : « obtenir deux cartes de même valeur »
- B : « obtenir un roi »

L'événement $A \cup B$ est donc : « obtenir deux cartes de même valeur ou un roi et une autre carte de valeur différente »

1.2.4 Autres opérations

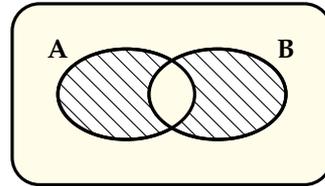
Les opérations peuvent se définir à l'aide du complémentaire, de l'intersection et de l'union de deux ensembles.

- Différence : $A - B$



$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}$$

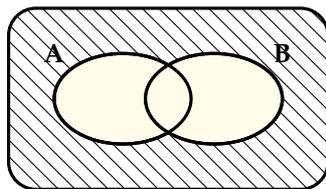
- Différence symétrique : $A \Delta B$



$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

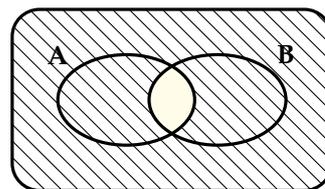
1.2.5 Lois De Morgan

- $\text{non}(A \text{ ou } B) = \text{non}(A) \text{ et non}(B)$



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- $\text{non}(A \text{ et } B) = \text{non}(A) \text{ ou non}(B)$



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Remarque : À l'aide des ces égalités, on pourrait par exemple définir l'union à l'aide du complémentaire et de l'intersection.

$$A \cup B = \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$$

On s'aperçoit que deux opérations, le complémentaire et l'intersection, sont suffisantes pour définir les autres.

1.3 Probabilité

Définition 4 : On appelle loi de probabilité sur un ensemble Ω , la fonction p à valeur dans $[0;1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété 1 : À partir de cette définition, on peut déduire :

$$1) p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = \sum_{i=1}^n e_i = 1$$

$$2) p(\emptyset) = 0$$

3) Pour tous événements A et B, on a les relations :

$$a) p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$b) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exemples :

1) On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \quad \text{et} \quad p(6) = 3 \times p(1)$$

Calculer la probabilité d'apparition de chaque face

Il n'y a que deux probabilités à déterminer : $p(1)$ et $p(6)$. On a :

$$\begin{cases} p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \\ p(6) = 3 \times p(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8p(1) = 1 \\ p(6) = 3 \times p(1) \end{cases}$$

$$\text{On obtient donc : } p(1) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad p(6) = \frac{3}{8}.$$

2) À l'aide des probabilités suivantes sur les événements A et B, calculer $p(\bar{B})$

$$p(A) = 0,3, \quad p(A \cup B) = 0,7 \quad \text{et} \quad p(A \cap B) = 0,2$$

On calcule d'abord $P(B)$:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B)$$

$$\text{On obtient alors : } p(B) = 0,7 - 0,3 + 0,2 = 0,6$$

$$\text{On calcule ensuite : } p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

1.4 Loi équiprobable

Définition 5 : Une loi de probabilité est **équiprobable** si chaque événement élémentaire e_i a la même probabilité d'apparition.

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} : \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n) \quad \text{on a : } p(e_i) = \frac{1}{n}.$$

Exemple : Pour un dé équilibré, chaque face a une probabilité de $\frac{1}{6}$ d'apparition.

Théorème 1 : Dans une loi équiprobable, la probabilité de l'événement A vérifie :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque : Lorsque la loi de probabilité est équiprobable, le calcul de probabilités revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas, un arbre, un tableau double entrée, un diagramme de Venn, une liste,...

⚠ Historiquement l'équiprobabilité a été le seul cas envisagé. Cependant le paradoxe du duc de Toscane montre que ce n'est pas toujours le cas.

Exemple : Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :

R : « tirer deux boules rouges »

C « tirer deux boules de même couleur »

On numérote les boules pour se retrouver dans un cas d'équiprobabilité. En effet comme il n'y a pas le même nombre de boules rouge et de boules bleues, la probabilité de tirer une boule rouge n'est pas la même que de tirer une boule bleue.

On établit la liste des tirages possibles. On cherche ici des paires (pas d'ordre).

$$\begin{aligned} \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\} & \quad 5 \text{ choix} \\ \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,5\}, \{2,6\} & \quad 4 \text{ choix} \\ \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\} & \quad 3 \text{ choix} \\ \{4,5\}, \{4,6\} & \quad 2 \text{ choix} \\ \{5,6\} & \quad 1 \text{ choix} \\ & = 15 \text{ tirages possibles} \end{aligned}$$

Pour avoir R il ne faut utiliser que les numéros de 1 à 4.

Il y a donc : $3 + 2 + 1 = 6$ choix. On a donc : $p(R) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Soit B : « obtenir deux boules bleues ».

Il n'y a qu'un choix possible, donc $p(B) = \frac{1}{15}$

On a alors : $p(C) = p(R \cup B) = p(R) + p(B) = \frac{6}{15} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$

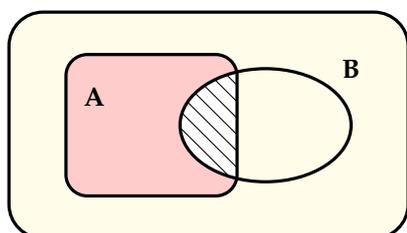
2 Probabilité conditionnelle

2.1 Définition

Le but de ce paragraphe est d'étudier la probabilité d'un événement B conditionné par un événement A.

Définition 6 : Lorsque $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité d'avoir l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. On a alors la relation suivante :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

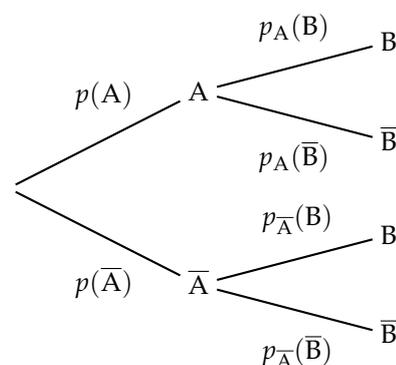


La probabilité de B sachant A correspond à la part de B dans A, c'est à dire la part hachurée dans l'ensemble A

On a alors : $p_A(B) = \frac{\text{Nb de éléments communs à A et B}}{\text{Nb de éléments de A}} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

2.2 Représentation par un arbre pondéré

Soient deux événements A et B. On peut représenter par un arbre pondéré les probabilités suivantes lorsque l'on connaît les probabilités de B ou \bar{B} lorsque A est réalisé.



Exemple : Dans un lycée 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes. De plus, 76 % des garçons sont externes. On choisit un élève au hasard.

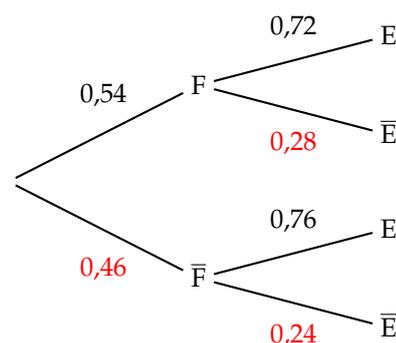
On pose :

- F : « l'élève choisi est une fille »
- E : « l'élève choisi est externe »

On traduit les données à l'aide de probabilités :

$$p(F) = 0,54, \quad p_F(E) = 0,72, \quad p_{\bar{F}}(E) = 0,76$$

On obtient alors l'arbre ci-contre :



Propriété : Pour remplir et utiliser un arbre, on a les propriétés suivantes :

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes (attention pas de pourcentage).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin. Par exemple la probabilité d'avoir une fille externe :

$$p(F) \times p_F(E) = p(F \cap E) = 0,54 \times 0,72 = 0,3888$$

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement. La probabilité d'avoir un élève externe :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(F \cap E) + p(G \cap E) = p(F) \times p_F(E) + p(G) \times p_G(E) \\ &= 0,54 \times 0,72 + 0,46 \times 0,76 = 0,7384 \end{aligned}$$

Autre exemple : Dans un atelier, il y a 2 % de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :

- Si la pièce est n'est pas défectueuse, elle est acceptée par ce test à 96 %.
- Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97 %.

Quel est le pourcentage de retour client ?

On appelle les événement suivants :

D : « la pièce est défectueuse » ;

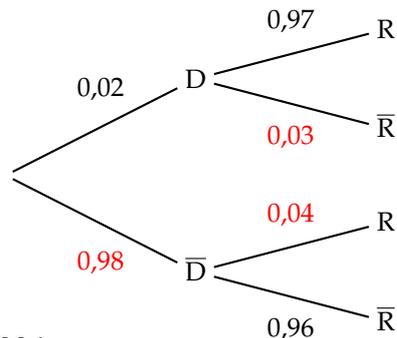
R : « la pièce est refusée ».

On construit l'arbre ci-contre

Retour client : probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée :

$$p(D \cap \bar{R}) = p(D) \times p_D(\bar{R}) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006$$

On peut s'attendre à 0,06 % de retour client.



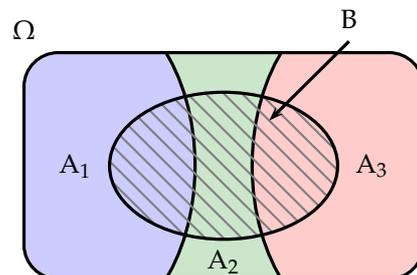
Théorème 2 : Probabilités totales

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une partition de l'univers Ω (ensembles deux à deux incompatibles et dont l'union forme Ω), alors, pour tout événement B, on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

Par exemple pour une partition de Ω en trois ensembles : A_1, A_2 et A_3 . On a alors :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B).$$



Remarque : Dans la plupart des cas, on utilise la partition A et \bar{A} . Dans un arbre, le nombre n d'ensembles formant une partition donne le nombre de branches issues d'un nœud.

2.3 Événements indépendants

Définition 7 : Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \quad \text{ou lorsque } p(A) \neq 0 \quad p_A(B) = p(B)$$

Exemple : Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont l'aviron et le badminton. 12 membres s'inscrivent pour l'aviron, 32 pour le badminton dont 4 pour les deux.

On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note A et B les événements :

- A « l'adhérent est inscrit pour l'aviron » ;
- B « l'adhérent est inscrit pour le badminton ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et \bar{B} ?

On peut représenter les événements dans un tableau double entrée ci-contre

	A	\bar{A}	Total
B	4	28	32
\bar{B}	8	56	64
Total	12	84	96

On calcule les probabilités suivantes :

$$p(A \cap B) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$$

$$p(A) \times p(B) = \frac{12}{96} \times \frac{32}{96} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, les événements A et B sont donc indépendants.

$$\text{De même : } p(A \cap \bar{B}) = \frac{8}{96} = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad p(A) \times p(\bar{B}) = \frac{12}{96} \times \frac{64}{96} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B})$, les événements A et \bar{B} sont donc indépendants.

Remarque : On peut montrer que si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour : $(\bar{A}$ et $B)$, $(A$ et $\bar{B})$ et $(\bar{A}$ et $\bar{B})$.

Autre exemple : On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. Justifier que les deux lancers sont des épreuves indépendantes.

Deux lancers de dé peut être assimilé à un tirage avec remise. À chaque lancer, l'ensemble des six valeurs sont remises en jeu sans interaction avec le lancer précédent. Ainsi on a autant de chance de faire un "6" au deuxième lancer quelque soit le résultat du premier.

3 Variable aléatoire

3.1 Définition

Définition 8 : Définir une variable aléatoire X sur Ω , c'est définir une fonction de Ω dans \mathbb{R} qui à chaque issue de Ω associe un nombre x_i

Définir une loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité $p(X = x_i) = p_i$

On a alors : $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Remarque : Le mot « variable » est un abus de langage car il s'agit d'une fonction et la mot « aléatoire » est lui aussi abusif car cette fonction est parfaitement déterminée.

Exemple : On lance trois pièces de monnaie. On numérote les pièces 1, 2 et 3. Pour chaque pièce, il y a deux éventualités, soit elle tombe sur face soit sur pile.

Si on relève dans l'ordre les résultats des pièces 1, 2 et 3, on obtient $2^3 = 8$ issues.

Si on associe l'apparition d'une pièce sur face à un gain de 2 € et l'apparition d'une pièce sur pile à une perte de 1 €, on crée une variable aléatoire X qui à une issue associe un gain. X peut donc prendre comme valeur : 6, 3, 0, -3.

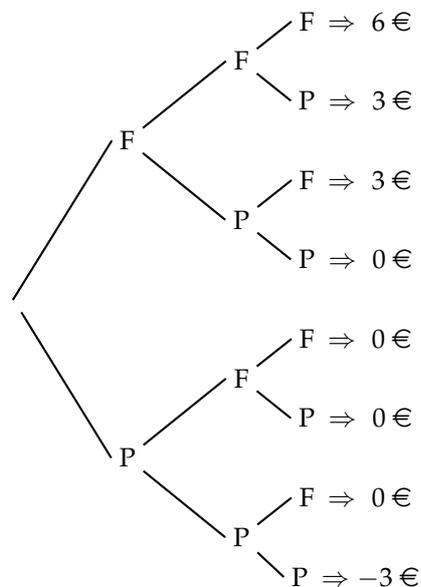
6 → "3F", 3 → "2F + 1P", 0 → "1F + 2P" enfin -3 → "3P".

On peut visualiser tous les cas à l'aide d'un arbre de dénombrement :

- $p(X = 6) = \frac{1}{8}$ une issue
- $p(X = 3) = \frac{3}{8}$ trois issues
- $p(X = 0) = \frac{3}{8}$ trois issues
- $p(X = -3) = \frac{1}{8}$ une issue

On a la loi de probabilité de X suivante :

x_i	6	3	0	-3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



3.2 Espérance, variance et écart-type

Définition 9 : On appelle **espérance mathématique** de la v.a. X , la quantité notée $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

On appelle **variance** et **écart-type** de la v.a. X , les quantités notées respectivement $V(X)$ et $\sigma(X)$ définies par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - E^2(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque :

- L'espérance mathématique correspond à la moyenne des valeurs prises par X , pondérées par les probabilités de la loi définie sur X .
Si X représente un gain, $E(X)$ représente le gain moyen que peut espérer le joueur sur un grand nombre d'expériences. Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur, si $E(X) = 0$ le jeu est équitable et si $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur.
- La variance correspond à la moyenne des écarts au carré. L'écart-type permet de revenir à un paramètre simple. Plus l'écart-type est grand plus les écarts obtenus entre deux expériences est important.

Exemple : Reprenons le lancer de trois pièces avec X le gain réalisé :

$$E(X) = \frac{1}{8} \times 6 + \frac{3}{8} \times 3 + \frac{3}{8} \times 0 + \frac{1}{8} \times (-3) = \frac{6 + 9 + 0 - 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5$$

En moyenne le joueur peut espérer gagner 1,5 €. Le jeu est favorable au joueur.

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{8} \times 6^2 + \frac{3}{8} \times 3^2 + \frac{3}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times (-3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{36 + 27 + 0 + 9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{72}{8} - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} = 6,75 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{6,75} \simeq 2,60 \quad \text{En moyenne les écarts de gain sont de 2,60 €}.$$

3.3 Simulation en Python

3.3.1 Variable aléatoire

On reprend l'exemple sur les lancers des pièces de monnaie.

Pour programmer la variable aléatoire :

on crée une fonction "simu_X()". Pour chaque pièce $p1$, $p2$ et $p3$ on choisit au hasard les entiers 0 (la pièce tombe sur pile) ou 1 (sur face). Ensuite :

- Si $p1 + p2 + p3 = 3$ (3F)
la fonction renvoie la valeur 6;
- Si $p1 + p2 + p3 = 2$ (2F + 1P)
la fonction renvoie la valeur 3;
- Si $p1 + p2 + p3 = 1$ (1F + 2P)
la fonction renvoie la valeur 0;
- Si $p1 + p2 + p3 = 0$ (3P)
la fonction renvoie la valeur -3.

```
import random
def simu_X():
    p1=random.randint(0,1)
    p2=random.randint(0,1)
    p3=random.randint(0,1)
    if p1+p2+p3==3:
        return 6
    elif p1+p2+p3==2:
        return 3
    elif p1+p2+p3==1:
        return 0
    else :
        return -3
```

3.3.2 Espérance et écart type

On utilise la fonction précédente pour déterminer une estimation de l'espérance et de l'écart type. Notez l'instruction float(0) pour m et s , afin que python considère ces variables comme des nombres décimaux.

La fonction estimation_E(p) prend comme paramètre p correspondant au nombre d'expériences.

Un essai donne :

$$\text{estimation_E}(1000) = 1,443$$

```
def estimation_E(p):
    m=float(0)
    for i in range(p):
        m=m+simu_X()
    return m/p
```

La fonction estimation_s(p,s) prend comme paramètres p correspondant au nombre d'expériences et m estimation de l'espérance.

Un essai donne :

$$\text{estimation_E}(1000,\text{estimation_E}(1000)) = 2,609$$

```
import math
def estimation_s(p,m):
    s=float(0)
    for i in range(p):
        s=s+(simu_X()-m)**2
    return math.sqrt(s/p)
```