Exercice 1: 1) On effectue 5 fois un tirage dans les mêmes conditions. Pour chaque tirage, on a deux issues possibles : « tirer une boule blanche » (avec une probabilité de $\frac{30}{50}=\frac{3}{5}=0{,}6$ ), qu'on peut nommer « succès », et « tirer une boule rouge » (avec une probabilité de $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}=0{,}4$ ), qu'on peut nommer « échec ». Chacune des 5 expériences est une expérience de Bernoulli de paramètre $p=0{,}6$ .
Comme il y a remise, les 5 tirages sont indépendants. On est dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n=5$ et $p=0{,}6$ .

X est la variable aléatoire qui comptabilise les « succès » dans ce schéma de Bernoulli. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}6$ .

2) a) $P(X=0)=0{,}4^5$ (probabilité d'obtenir 5 échecs)
ou $P(X=0)=\binom{5}{0}\times 0{,}6^0\times 0{,}4^5$ avec $\binom{5}{0}=1$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X=k) | 0,010 | 0,077 | 0,230 | 0,346 | 0,259 | 0,078 |

$\boxed{P(X=0)\approx 0{,}010}$

$P(X=1)=\binom{5}{1}\times 0{,}6^1\times 0{,}4^4=5\times 0{,}6\times 0{,}4^4$ $\boxed{P(X=1)\approx 0{,}077}$

$P(X=2)=\binom{5}{2}\times 0{,}6^2\times 0{,}4^3=10\times 0{,}6^2\times 0{,}4^3$ $\boxed{P(X=2)\approx 0{,}230}$

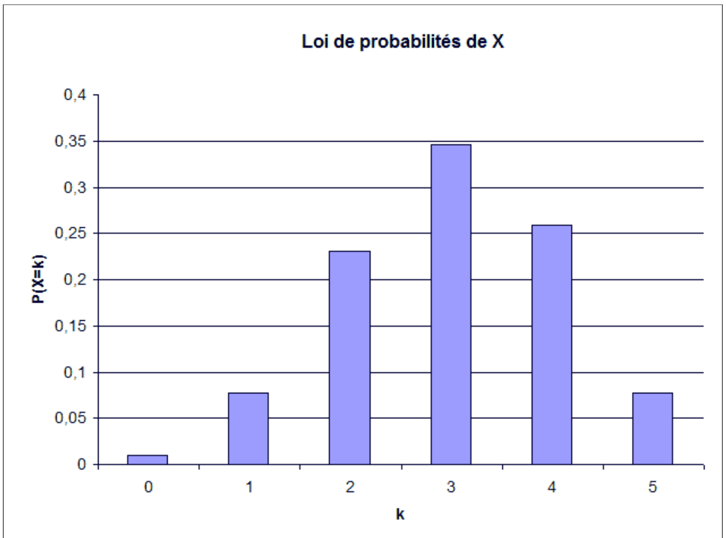
$P(X=3)=\binom{5}{3}\times 0{,}6^3\times 0{,}4^2=10\times 0{,}6^3\times 0{,}4^2$ $\boxed{P(X=3)\approx 0{,}346}$

$P(X=4)=\binom{5}{4}\times 0{,}6^4\times 0{,}4^1=5\times 0{,}6^4\times 0{,}4$ $\boxed{P(X=4)\approx 0{,}259}$

$P(X=5)=\binom{5}{5}\times 0{,}6^5\times 4^0=0{,}6^5$ $\boxed{P(X=5)\approx 0{,}078}$

b) La valeur la plus probable prise par X est 3, avec une probabilité d'environ $0{,}346$ .

c) Ci-contre.




3) $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$P(X\leqslant 2)=0{,}4^5+5\times 0{,}6\times 0{,}4^4+10\times 0{,}6^2\times 0{,}4^3$

$\boxed{P(X\leqslant 2)\approx 0{,}317}$

$P(1\leqslant X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

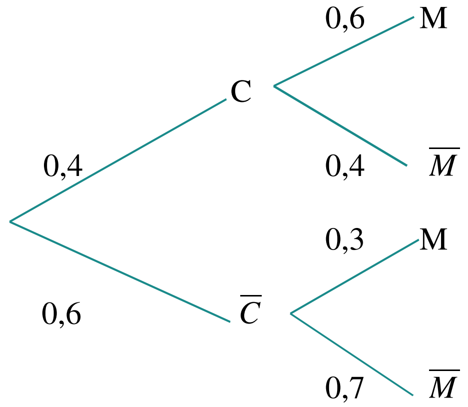
$P(1\leqslant X\leqslant 3)=5\times 0{,}6\times 0{,}4^4+10\times 0{,}6^2\times 0{,}4^3+10\times 0{,}6^3\times 0{,}4^2$ $\boxed{P(1\leqslant X\leqslant 3)\approx 0{,}653}$

$P(X\geqslant 4)=P(X=4)+P(X=5)=5\times 0{,}6^4\times 0{,}4+0{,}6^5$ $\boxed{P(X\geqslant 4)\approx 0{,}337}$

Exercice 2 (Bac ES, Liban, 29 mai 2012)

1) $P_C(M)=P\frac{(M\cap C)}{P(C)}=\frac{24\,\%}{40\,\%}=\frac{0{,}24}{0{,}4}=0{,}6$ . $\boxed{P_C(M)=0{,}6}$

2)




3) $\boxed{P(\overline{C}\cap\overline{M})=0{,}6\times0{,}4=0{,}42}$

4) D'après la formule de probabilités totales relative à la partition C/ $\overline{C}$:

$P(M)=P(M\cap C)+P(M\cap\overline{C})$

$P(M)=0{,}24+0{,}6\times0{,}3=0{,}24+0{,}18$
$\boxed{P(M)=0{,}42}$

5) $P(M)\times P(C)=0{,}42\times0{,}4=0{,}168$ . $P(M\cap C)=0{,}24$ . $0{,}168\neq0{,}24$ donc $P(M)\times P(C)\neq P(M\cap C)$
Donc les événements P et M ne sont pas indépendants.

6) a)

| $x_i$ | 75 | 40 | 35 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,24 | 0,18 | 0,16 | 0,42 |
| | $P(M\cap C)$ | $P(\overline{C}\cap M)$ | $P(C\cap\overline{M})$ | $P(\overline{C}\cap\overline{M})$ |

b) $E(X)=75\times0{,}24+40\times0{,}18+35\times0{,}16+0\times0{,}42=18+7{,}2+5{,}6$ $\boxed{E(X)=30{,}8}$.
Il s'agit du gain moyen que peut espérer le coloriste par cliente.

c) On suppose que la couleur-soin reste au même prix, et que le prix augmenté de « l'effet coup de soleil » n'aura pas d'incidence sur le choix des clientes.

L'espérance augmentée de 15% serait égale à $\boxed{30{,}8\times1{,}15=35{,}42}$.

Soit $p$ le nouveau prix en euros de « l'effet coup de soleil ».

On veut que $E(X)=35{,}42$ , soit que $(35+p)\times0{,}24+p\times0{,}18+35\times0{,}16+0\times0{,}42=35{,}42$ (E)

$(E)\Leftrightarrow\ 8{,}4+0{,}24\,p+0{,}18\,p+5{,}6=35{,}42$

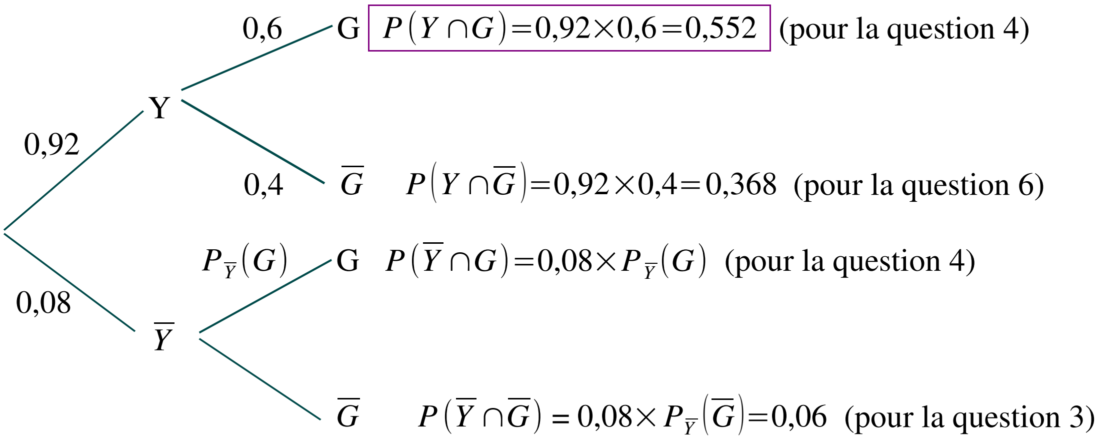
$(E)\Leftrightarrow\ 0{,}42\,p=35{,}42-8{,}4-5{,}6\ \Leftrightarrow\ 0{,}42\,p=21{,}42\ \Leftrightarrow\ \boxed{p=\frac{21{,}42}{0{,}42}=51}$

Pour que l'espérance de gain par cliente augmente de 15 %, le coloriste doit facturer « l'effet coup de soleil » 51€ (à condition que ce changement de prix n'ait pas d'influence sur le choix de clientes).

Exercice 3 (Bac ES Polynésie, 8 juin 2012) :

1) $p(\overline{Y} \cap \overline{G})$ vaut 6%, c'est-à-dire $\boxed{0{,}06}$, car 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs.

2)




3) $0{,}08 \times P_{\overline{Y}}(\overline{G}) = 0{,}06$ donc $\boxed{p_{\overline{Y}}(\overline{G}) = \dfrac{0{,}06}{0{,}08} = 0{,}75}$

75 % des touristes ne visitant pas Yellowstone ne visitent pas non plus le parc de Grand Teton.

4) Montrer que p(G) = 0, 572. Comme $P_{\overline{Y}}(\overline{G}) = 0{,}75$, $\boxed{P_{\overline{Y}}(G) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25}$.

Donc $\boxed{P(\overline{Y} \cap G) = 0{,}08 \times 0{,}25 = 0{,}02}$.

D'après la formule de probabilités totales relative à la partition Y/ $\overline{Y}$ , on calcule :

$P(G) = P(Y \cap G) + P(\overline{Y} \cap G) = 0{,}552 + 0{,}02$ $\boxed{P(G) = 0{,}572}$

5) Un touriste a visité le parc du Grand Teton. Calculer la probabilité qu'il ait aussi visité le parc de Yellowstone (le résultat sera arrondi à $10^{-3}$ près). $P_G(Y) = \dfrac{P(Y \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0{,}552}{0{,}572}$ $\boxed{P_G(Y) \approx 0{,}965}$

6) a)

| Somme en dollars | 0 | 7 | 10 | 17 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,060 | 0,020 | 0,368 | 0,552 |
| | $P(\overline{Y} \cap \overline{G})$ | $P(\overline{Y} \cap G)$ | $P(Y \cap \overline{G})$ | P(Y∩G) |

b) Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée dans le tableau ci-dessus.

$E(X) = 0{,}06 \times 0 + 0{,}02 \times 7 + 0{,}368 \times 10 + 0{,}552 \times 17$

$E(X) = 0{,}14 + 3{,}68 + 9{,}384$ $\boxed{E(X) = 13{,}204}$

13,204 $ est la somme moyenne dépensée par un touriste venant dans le Wyoming pour la visite des parcs naturels de Yellowstone et du Grand Teton.

c) $\sigma(X) = \sqrt{0{,}06 \times (0 - 13{,}204)^2 + 0{,}02 \times (7 - 13{,}204)^2 + 0{,}368 \times (10 - 13{,}204)^2 + 0{,}552 \times (17 - 13{,}204)^2}$

$\boxed{\sigma(X) \approx 4{,}79}$

Exercice 4 : 1) a) Au total, il y a $2400+4000=6400$ balances.
Le nombre de balances défectueuses est de $6\%\times 2400+7\%\times 4000=0{,}06\times 2400+0{,}07\times 4000=424$ .

La probabilité pour qu'une balance prélevée soit défectueuse est donc de $\boxed{\dfrac{424}{6400}=0{,}06625}$

b) La probabilité pour qu'une balance prélevée au hasard ne soit pas défectueuse est de $\boxed{1-0{,}06625=0{,}93375}$.
(Résultat que l'on peut aussi obtenir par le calcul $\dfrac{6400-424}{6400}$ )

c) Notons D l'événement « La balance prélevée est défectueuse », A l'événement « La balance provient de l'usine A » et B l'événement « La balance provient de l'usine B ». On cherche ici à calculer $P_D(A)$ et $P_D(B)$ .

$P_D(A)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}$ donc $\boxed{P(A\cap D)=P(D)\times P_D(A)}$ (c'est une formule du cours, mais personnellement, je la retiens à partir de la précédente)

$P_A(D)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(A)}$ donc $\boxed{P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)}$.

On a donc $\boxed{P(D)\times P_D(A)=P(A)\times P_A(D)}$ (qui est aussi dans le cours, mais que je préfère retrouver)

Comme P(D)≠0, on peut donc écrire $\boxed{P_D(A)=\dfrac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)}}$

On sait que $\boxed{P(D)=0{,}06625}$ (question 1-a), que $\boxed{P(A)=\dfrac{2400}{6400}=0{,}375}$ et que $\boxed{P_A(D)=6\%=0{,}06}$.

Donc $P_D(A)=\dfrac{0{,}375\times 0{,}06}{0{,}06625}=\dfrac{2250}{6625}=\dfrac{18}{53}$ $\boxed{P_D(A)\approx 0{,}3396}$.

De même, $\boxed{P_D(B)=\dfrac{P(B)\times P_B(D)}{P(D)}}$ avec $\boxed{P(B)=\dfrac{4000}{6400}=0{,}625}$ et $\boxed{P_B(D)=7\%=0{,}07}$.

Donc $P_D(B)=\dfrac{0{,}625\times 0{,}07}{0{,}06625}=\dfrac{4375}{6625}=\dfrac{35}{53}$ donc $\boxed{P_D(B)\approx 0{,}6604}$.

(Voir page suivante pour le traitement de la question 1 à l'aide d'un arbre de probabilités)

2) a) Chaque balance choisie a la probabilité de 0,9 de fonctionner encore parfaitement au bout d'un an. Le choix d'une balance correspond à une expérience de Bernoulli dont le « succès » (=« la balance fonctionne parfaitement au bout d'un an ») a une probabilité de 0,9 d'être réalisé.

Le choix des six balances de l'hôtelier n'est pas effectué avec remise, mais comme le stock est de 6400 balances, on assimile le choix des 6 balances à un tirage avec remise, de manière à obtenir un schéma de Bernoulli de paramètres $n=6$ et $p=0{,}9$ .

La variable aléatoire X dénombre le nombre de balances qui fonctionnent parfaitement au bout d'un an sur les 6 achetées par l'hôtelier. X compte le nombre de « succès » dans le schéma de Bernoulli de paramètres $n=6$ et $p=0{,}9$ . X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0{,}9$ .

b) Probabilité pour qu'au bout d'un an :

- Toutes les balances fonctionnent : $P(X=6)=\binom{6}{6}\times 0{,}9^6\times 0{,}1^0=0{,}9^6$ . $\boxed{P(X=6)\approx 0{,}5314}$
- Aucune balance ne fonctionne : $P(X=0)=\binom{6}{0}\times 0{,}9^0\times 0{,}1^6=0{,}1^6=0{,}000001$ $\boxed{P(X=0)\approx 0}$

– Au moins la moitié des balances fonctionnent : $P(X \geqslant 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$$P(X \geq 3)=\binom{6}{3}\times 0{,}9^3\times 0{,}1^3+\binom{6}{4}\times 0{,}9^4\times 0{,}1^2+\binom{6}{5}\times 0{,}9^5\times 0{,}1^1+0{,}9^6$$

$$P(X \geqslant 3)=20\times 0{,}9^3\times 0{,}1^3+15\times 0{,}9^4\times 0{,}1^2+6\times 0{,}9^5\times 0{,}1+0{,}9^6 \qquad \boxed{P(X \geqslant 3)\approx 0{,}9987}$$

– Au plus la moitié des balances fonctionnent : $P(X \leqslant 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+p(X=3)$

$$P(X \leq 3)=\binom{6}{0}\times 0{,}9^0\times 0{,}1^6+\binom{6}{1}\times 0{,}9^1\times 0{,}1^5+\binom{6}{2}\times 0{,}9^2\times 0{,}1^4+\binom{6}{3}\times 0{,}9^3\times 0{,}1^3$$

$$P(X \leqslant 3)=0{,}1^6+6\times 0{,}9\times 0{,}1^5+15\times 0{,}9^2\times 0{,}1^4+20\times 0{,}9^3\times 0{,}1^3 \qquad \boxed{P(X \leqslant 3)\approx 0{,}0159}$$

c) Si une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, son espérance est de $n\times p$, donc ici de $\boxed{6\times 0{,}9=5{,}4}$.

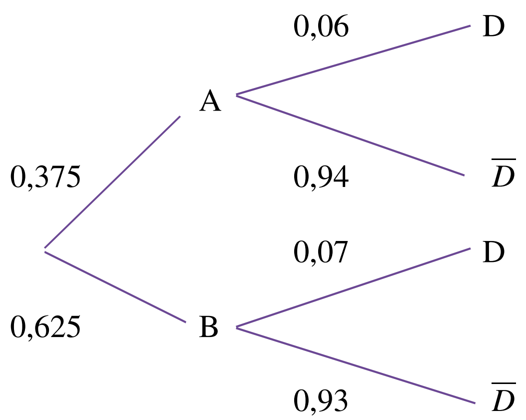
Sa variance vaut $n\times p\times(1-p)$, donc ici $\boxed{6\times 0{,}9\times 0{,}1=0{,}54}$.

L'écart-type est égal à la racine carrée de la variance, donc ici à $\boxed{\sqrt{0{,}54}\approx 0{,}7348}$.

La question 1 pouvait être traitée à l'aide d'un arbre de probabilités :

$P(A)=\dfrac{2400}{6400}=0{,}375 \qquad P(B)=\dfrac{4000}{6400}=0{,}625$

1)




$P(A\cap D)=0{,}375\times 0{,}06=0{,}0225$

$P(A\cap \overline{D})=0{,}375\times 0{,}94=0{,}3525$

$P(B\cap D)=0{,}625\times 0{,}07=0{,}04375$

$P(B\cap \overline{D})=0{,}625\times 0{,}93=0{,}58125$

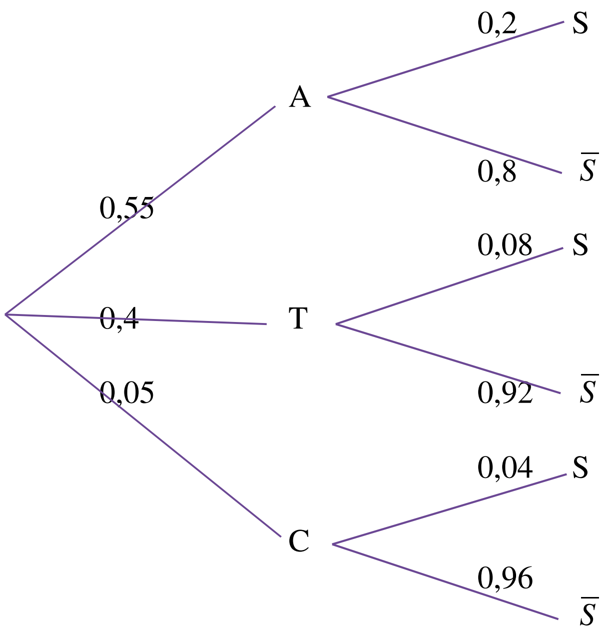
a) $P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=0{,}0225+0{,}04375 \qquad \boxed{P(D)=0{,}06625}$

b) $P(\overline{D})=P(A\cap \overline{D})+P(B\cap \overline{D})=0{,}3525+0{,}58125 \qquad \boxed{P(\overline{D})=0{,}93375}$

c) $P_D(A)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}0225}{0{,}06625} \qquad \boxed{P_D(A)\approx 0{,}3396} \qquad P_D(B)=\dfrac{P(B\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}04375}{0{,}06625} \qquad \boxed{P_D(B)\approx 0{,}6604}$

Exercice 5 (Bac ES Antilles-Guyane, septembre 2011) :

1)




$P(\overline{S} \cap T) = 0{,}4 \times 0{,}92 = 0{,}368$ (pour question 4)

2) $\boxed{P(T \cap S) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032}$

3) Les événements A, T et C forment une partition de l'univers des possibles. La formule de probabilités totales nous donne :

$P(S) = P(A \cap S) + P(T \cap S) + P(C \cap S) = 0{,}55 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}08 + 0{,}05 \times 0{,}04 = 0{,}11 + 0{,}032 + 0{,}002$

$\boxed{P(S) = 0{,}144}$

4) $P_{\overline{S}}(T) = \dfrac{P(\overline{S} \cap T)}{P(\overline{S})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}92}{1 - P(S)} = \dfrac{0{,}368}{1 - 0{,}144} = \dfrac{0{,}368}{0{,}856}$ $\boxed{P_{\overline{S}}(T) \approx 0{,}430}$

5) Comme on ne connaît pas le nombre de dossiers, mais seulement la proportion de clients ayant choisi une assurance multirisque, on va considérer que le nombre de dossiers est suffisamment grand pour assimiler ce choix à 3 tirages avec remise, afin que la proportion de clients ayant choisi une assurance soit la même à chaque « tirage ». On se place donc dans un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}144$ (pour chaque dossier, on considère comme « succès » le fait que le dossier soit celui d'un client ayant choisi une assurance multirisque). Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de dossiers, parmi les 3, de clients ayant choisi une assurance multirisque. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}144$ .

La probabilité pour qu'au moins deux des dossiers concernent un client ayant souscrit l'assurance multirisque est $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$ .

$P(X \geq 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}144^2 \times (1 - 0{,}144) + \binom{3}{3} \times 0{,}144^3 \times (1 - 0{,}144)^0$

$P(X \geqslant 2) = 3 \times 0{,}144^2 \times 0{,}856 + 0{,}144^3$ $\boxed{P(X \geqslant 2) \approx 0{,}056}$

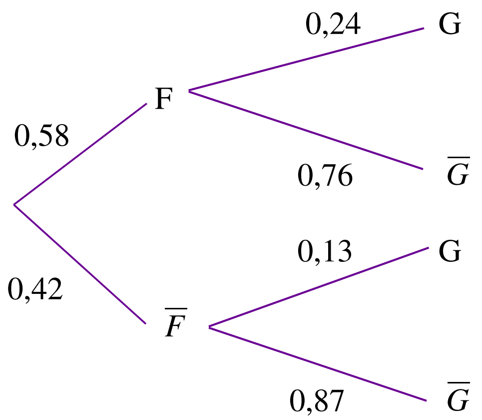
Exercice 7 ( Bac ES Asie, juin 2012) :

1) $\boxed{p(F)=58\,\%=0{,}58}$ car 58 % des abonnés ont un accès internet sur ligne fixe.

$\boxed{p_F(G)=24\,\%=0{,}24}$ car parmi les abonnés ayant un accès internet sur ligne fixe, 24 % ont également un accès 3G sur téléphone portable.

$\boxed{p_{\overline{F}}(G)=13\,\%=0{,}13}$ car parmi les abonnés qui n'ont pas d'accès internet sur ligne fixe, 13 % ont un accès 3G sur leur téléphone portable.

2)




$P(F\cap G)=0{,}58\times 0{,}24=0{,}1392$

$P(F\cap \overline{G})=0{,}58\times 0{,}76=0{,}4408$

$P(\overline{F}\cap G)=0{,}42\times 0{,}13=0{,}0546$

$P(\overline{F}\cap \overline{G})=0{,}42\times 0{,}87=0{,}3654$

3) $\boxed{p(F\cap \overline{G})=0{,}58\times 0{,}76=0{,}4408}$. Il s'agit de la probabilité pour que la fiche prélevée au hasard soit celle d'un abonné qui a un accès internet sur ligne fixe mais pas d'accès internet 3G sur téléphone portable.

4) a) F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers des possibles. D'après la formule de probabilités totales, $P(\overline{G})=P(F\cap \overline{G})+P(\overline{F}\cap \overline{G})=0{,}58\times 0{,}76+0{,}42\times 0{,}87=0{,}4408+0{,}3654$ $\boxed{P(\overline{G})=0{,}8052}$

b) $P(G)=1-P(\overline{G})=1-0{,}8052=0{,}1938=19{,}38\,\%$ . Il est faux qu'au moins 25 % des abonnés aient un accès 3G sur leur téléphone portable car ils sont seulement 19,38 %.

5) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de fiches d'abonnés n'ayant pas d'accès 3 G parmi les 3 fiches tirées. X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=0{,}8052$ , car les tirages sont assimilés à des tirages avec remise et car, pour chacune des 3 fiches, la probabilité qu'il s'agisse de celle d'un client n'ayant pas d'accès 3G sur téléphone portable (ce qu'on considère comme « succès ») est de $0{,}8052$ .

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\times 0{,}8052^1\times(1-0{,}8052)^{3-1}=3\times 0{,}8052\times(1-0{,}8052)^2=2{,}4156\times 0{,}1948^2$$

$\boxed{P(X=1)\approx 0{,}0917}$

La probabilité pour qu'exactement une des trois fiches tirées soit celle d'un abonné n'ayant pas d'accès 3G sur téléphone portable est d'environ 0,0917.