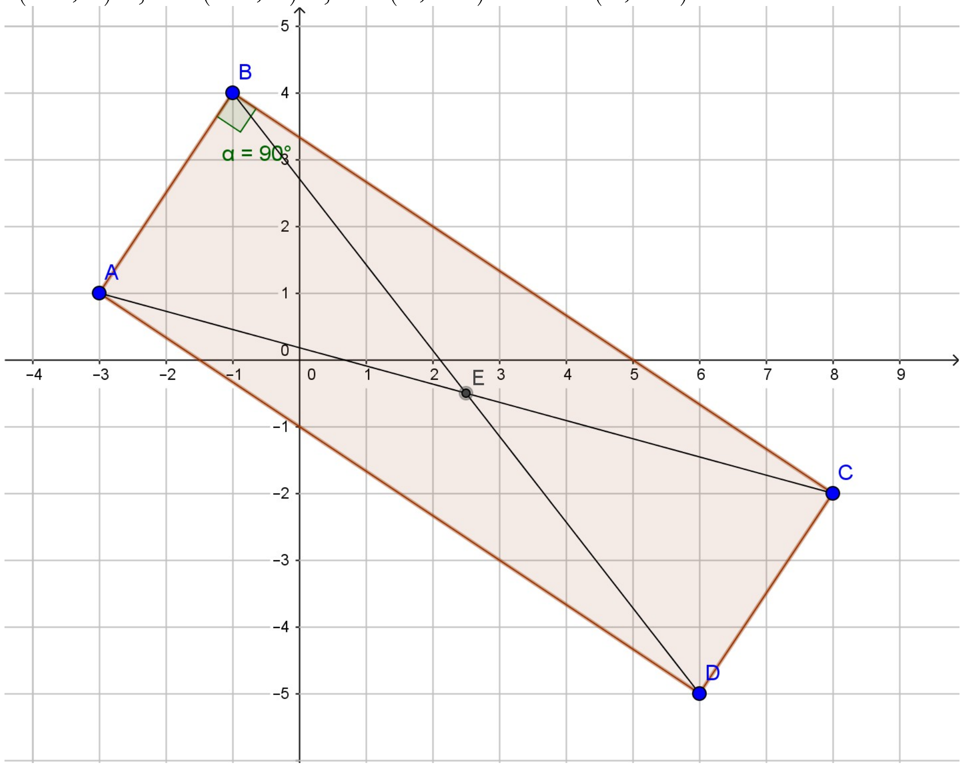
Ex 1 : Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points suivants :
$A(-3;1)$, $B(-1;4)$, $C(8;-2)$ et $D(6;-5)$



Conjecture : ABCD est un rectangle

milieu de $[AC]$: $K(\frac{-3+8}{2};\frac{1+(-2)}{2})$ soit $K(2{,}5;-0{,}5)$

milieu de $[BD]$: $L(\frac{-1+6}{2};\frac{4+(-5)}{2})$ soit $L(2{,}5;-0{,}5)$

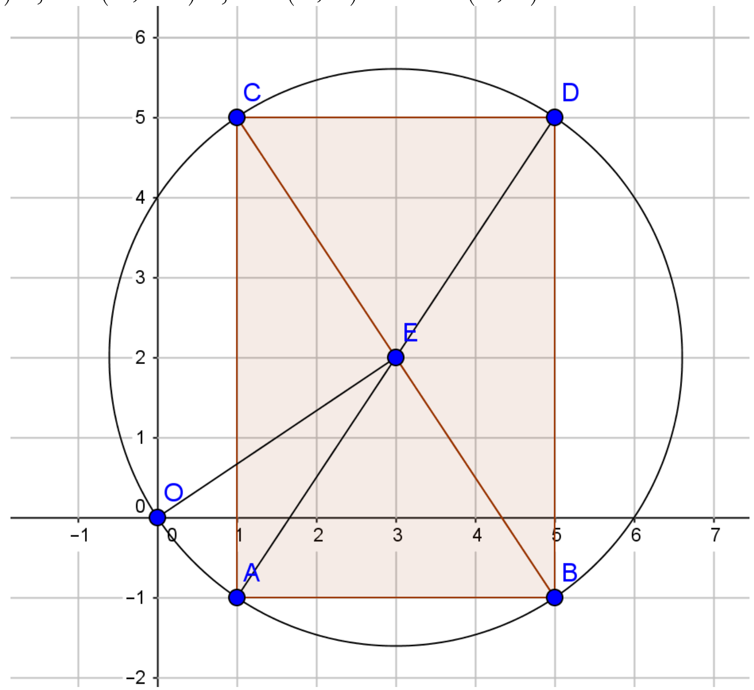
les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu
donc $ABCD$ est un parallélogramme

$$AC=\sqrt{(8-(-3))^2+(-2-1)^2}=\sqrt{11^2+(-3)^2}=\sqrt{130}$$

$$BD=\sqrt{(6-(-1))^2+(-5-4)^2}=\sqrt{7^2+(-9)^2}=\sqrt{130}$$

donc $AC=BD$ (diagonales isométriques) donc $ABCD$ est un rectangle

Ex 2 : Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points suivants :
$A(1;-1)$, $B(5;-1)$, $C(1;5)$ et $D(5;5)$



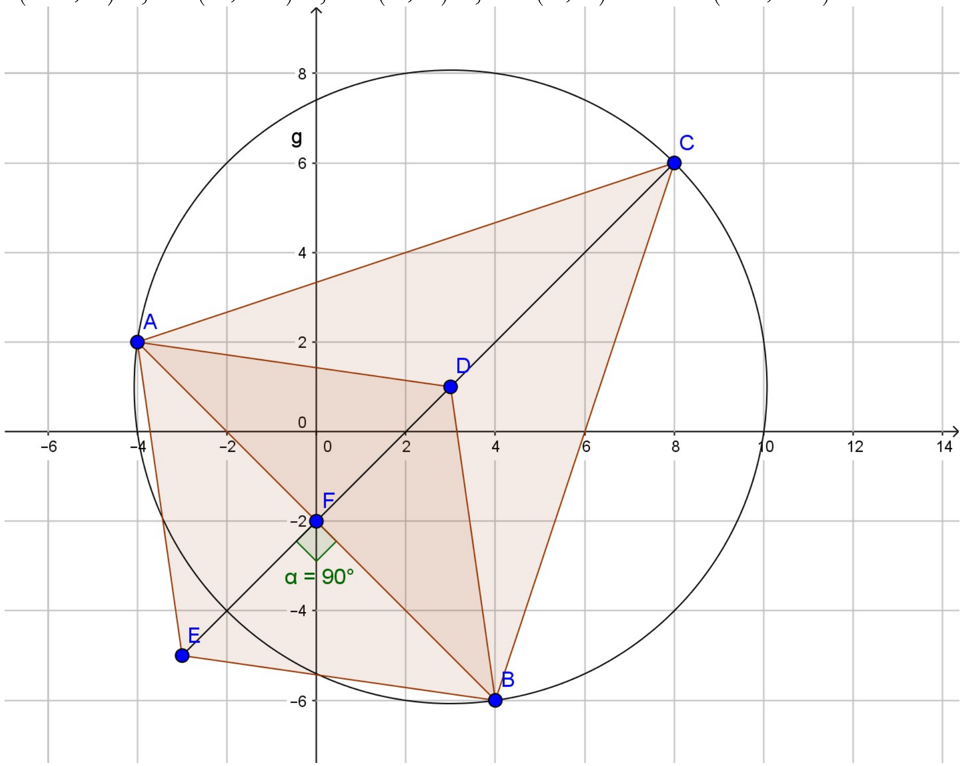
D'après la figure on déduit que $AB=4$ et $AC=6$
de plus $BC=\sqrt{(5-1)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$
Ainsi, $AB^2+AC^2=BC^2$
d'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, ABC est rectangle en A

Soit $E(3;2)$ le centre du cercle $(\mathscr{C})$ de rayon $\sqrt{13}$

$$EO=\sqrt{(0-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$$
$$EA=\sqrt{(1-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$
$$EB=\sqrt{(5-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$
$$EC=\sqrt{(5-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$
$$ED=\sqrt{(1-3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$$

Donc, les points O, A, B, C, D appartiennent au cercle $\mathscr{C}(E ; \sqrt{13})$
On dit alors que ces 5 points sont *cocycliques*

Ex 3 : Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,,J)$ on donne les points suivants :
$A(-4\,;2)$, $B(4\,;-6)$, $C(8\,;6)$, $D(3\,;1)$ et $E(-3\,;-5)$



D'après la figure, on peut déduire que :
$AD^2=7^2+1^2=50$; $DB^2=1^2+5^2=50$
donc $AD=DB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

donc ADB est isocèle en D

De même, on obtient :
$AE^2=1^2+7^2=50$; $EB^2=7^2+1^2=50$
donc $AE=EB=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

donc AEB est isocèle en E

Par conséquent : $AD=DB=AE=EB=5\sqrt{2}$
donc $AEBD$ est un losange

On pose le point $F(0\,;-2)$ (cf graphique)

Alors $FB^2=4^2+4^2=32$; $FE^2=3^2+3^2=18$; $EB^2=50$
donc $FB^2+FE^2=EB^2$
d'après la *réciproque du théorème de Pythagore*, EFB est rectangle en F

donc on en déduit que $(FB)\perp(EF)$
par suite, on obtient : $(AB)\perp(ED)$

La médiane issue de C du triangle ABC est aussi la hauteur et la médiatrice du segment $[AB]$;
donc la droite (EC) est un axe de symétrie du triangle ABC
donc ABC est isocèle en C

$$DA=\sqrt{(-4-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{50}$$
$$DB=\sqrt{(4-3)^2+(-6-1)^2}=\sqrt{50}$$
$$DC=\sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{50}$$

donc $DA=DB=DC=5\sqrt{2}$
donc D est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC

BONUS **:**
Quelle est la nature du quadrilatère $AEBC$?

D'après ce qui précède, $(AB)\perp(ED)$
donc les diagonales du quadrilatère $AEBC$ sont perpendiculaires
donc $AEBC$ est un *cerf-volant*