2nde E — DS n° 8 : Fonctions inverses (*Correction*) — Avril 2017

Ex 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x+3}{x+4}$

f est définie si $x+4\neq 0$ soit $x\neq -4$ donc $D_f=]-\infty;-4[\cup]-4;+\infty[$

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2x+8-8+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=2-\frac{5}{x+4}\quad \text{(forme canonique)}$$

Algorithme de f :

- Choisir un réel différent de -4
- Ajouter 4
- Calculer son inverse
- Multiplier par -5
- Ajouter 2
- Afficher le résultat

Étude des variations de f sur $]-4;+\infty[$:

Soient $a,b\in]-4;+\infty[$ tels que $a<b$

donc $a+4 < b+4$

donc $\frac{1}{a+4} > \frac{1}{b+4}$

donc $\frac{-5}{a+4} < \frac{-5}{b+4}$

donc $2+\frac{-5}{a+4} < 2+\frac{-5}{b+4}$

donc $f(a)<f(b)$

donc f est strict croissante sur $]-4;+\infty[$

Par symétrie centrale par rapport au point $A(-4;2)$, f est aussi strictement croissante sur $]-\infty;-4[$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f		$\nearrow$ $+\infty$	$\|$		2
	2		$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	

Ex 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$

$f(x)=0$ donne $\frac{-2x+3}{x-1}=0$ donc $-2x+3=0$ donc $-2x=-3$
donc $x=1{,}5$ donc $S=\{1{,}5\}$

$f(x)=3$ donne $\frac{-2x+3}{x-1}=3$ donc $-2x+3=3x-3$ donc $-5x=-6$
donc $x=1{,}2$ donc $S=\{1{,}2\}$

Tableau de signes de f(x) :

x	$-\infty$		1		1,5		$+\infty$
$-2x+3$		+		+	0	−	
$x-1$		−	0	+	0	+	
$f(x)$		−	$\|$	+	0	−	

On en déduit les solutions de $f(x)\leqslant 0$: $S=]-\infty;1[\cup[1{,}5;+\infty[$

BONUS :

$f(x)\geqslant 1$ donne $\frac{-2x+3}{x-1}\geqslant 1$ donc $\frac{-2x+3}{x-1}-1\geqslant 0$
donc $\frac{-2x+3-(x-1)}{x-1}\geqslant 0$ donc $\frac{-3x+4}{x-1}\geqslant 0$

On effectue alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		4/3		$+\infty$
$-3x+4$		+		+	0	−	
$x-1$		−	0	+	0	+	
$f(x)-1$		−	$\|$	+	0	−	

Ainsi on déduit que $S=]1;\frac{4}{3}]$

Ex 3 :
Une entreprise produit un objet en grande quantité. Le coût de production total, pour une production x comprise entre 5 et 1 000 unités ;
Le coût total de production est donné par $C(x)=15x+3000$

Le coût moyen unitaire est donné par la fonction f définie par $f(x)=\frac{C(x)}{x}$

Les Coûts fixes sont : $C_0=3000$; cela correspond au coût pour $x=0$
Les Coûts variables sont : $C_v=15x$; cela correspond au coût pour $x>0$
Ainsi $C(x)=C_0+C_v$

le coût total est $C(x)=15x+3000$; pour une production de 750 unités on obtient un coût total de : $C(750)=15\times 750+3000=14250$ €

le coût moyen est $f(x)=\frac{C(x)}{x}=15+\frac{3000}{x}$; pour une production de 250 unités on obtient un coût moyen de : $f(500)=15+\frac{3000}{250}=27$ €

Si le coût moyen de production est de 21 € alors $f(x)=21$
donc $15+\frac{3000}{x}=21$ donc $\frac{3000}{x}=6$ donc $x=\frac{3000}{6}=500$

Si le coût moyen de production est inférieur à 27,50 € alors $f(x)\leqslant 27{,}5$
donc $15+\frac{3000}{x}\leqslant 27{,}5$ donc $\frac{3000}{x}\leqslant 12{,}5$ donc $\frac{x}{3000}\geqslant\frac{1}{12{,}5}$
donc $x\geqslant\frac{3000}{12{,}5}$ donc $x\geqslant 240$

<u>Tableau de variations de f sur $[5;1000]$:</u>

x	5	1000
f	615	18

<u>Graphique de la fonction « Coût moyen » :</u>