## Correction 1

1. On a la distance suivante :

$$AK = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + [(-3)-(-6)]^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$K$ est le centre du cercle et la distance $AK$ est égale au rayon : le point $A$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

2. Le point $B$ est diamétralement opposé au point $A$ : le segment $[AB]$ forme un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

Ainsi, le point $B$ est positionné de sorte à ce que le point $K$ soit le milieu du segment $[AB]$. Les coordonnées du point $B$ vérifient les équations suivantes :

$$x_K = \frac{x_A+x_B}{2} \qquad y_K = \frac{y_A+y_B}{2}$$
$$2 = \frac{6+x_B}{2} \qquad -3 = \frac{-6+y_B}{2}$$
$$4 = 6+x_B \qquad -6 = -6+y_B$$
$$-2 = x_B \qquad 0 = y_B$$

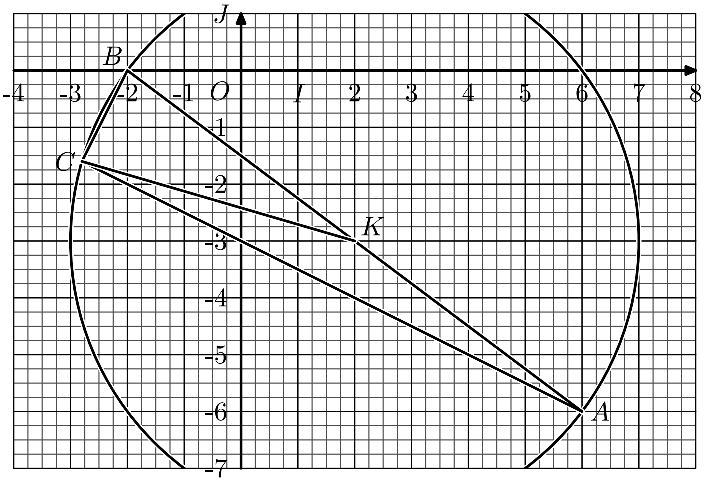
Le point $B$ a pour coordonnée $(-2\,;0)$

3. Montrons que le point $C$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ :

$$KC = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2} = \sqrt{\left(-\frac{14}{5}-2\right)^2 + \left[-\frac{8}{5}-(-3)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{25}+\frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{625}{25}} = 5$$

On vient de montrer que le segment $[KC]$ forme un rayon du cercle $\mathscr{C}$ : le point $C$ est donc un point du cercle.

$[AB]$ forme un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ et le point $C$ est un point de ce cercle.
Si un triangle est inscrit dans un cercle et si un de ses côtés forme un diamètre alors ce triangle est rectangle et ce côté est l'hypoténuse de ce triangle.
Le triangle $ABC$ est rectangle en $C$.




## Correction 2

1. a. Déterminons les coordonnées du point $K$ milieu du segment $[BD]$ :

$$K\left(\frac{x_B+x_D}{2}\,;\frac{y_B+y_D}{2}\right) = \left(\frac{4+(-1)}{2}\,;\frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$$

Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme ses diagonales se coupe en leurs milieux : le point $K$ est également le milieu du segment $[AC]$.
Ainsi, les coordonnées du point $C$ vérifieent l'égalité suivantes :

$$K\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{-2+x_C}{2}\,;\frac{4+y_C}{2}\right)$$

En identifiant les abscisses et les ordonnées de ces deux coordonnées, on obtient les deux égalités suivantes :

$$\frac{-2+x_C}{2} = \frac{3}{2} \qquad \frac{3+y_C}{2} = \frac{5}{2}$$
$$-2+x_C = 3 \qquad 3+y_C = 5$$
$$x_C = 5 \qquad y_C = 2$$

Ainsi, le point $C$ a pour coordonnées : $C\,(5\,;2)$

b. Déterminons les longueurs des deux diagonales du quadrilatère $ABCD$ :

- $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{[5-(-2)]^2+(2-3)^2} = \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- $BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} = \sqrt{(-1-4)^2+(0-5)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

Ainsi, on a : $AC = BD$
Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors ce parallélogramme est un rectangle.
$ABCD$ est un rectangle.

2. a. Déterminer les milieux des segments $[AB]$ et $[EF]$ :

- Le point $M$ milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{4+(-2)}{2}\,;\frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\,;\frac{8}{2}\right) = (1\,;4)$$

- Le point $N$ milieu du segment $[EF]$ a pour coordonnées :

$$N\left(\frac{x_E+x_F}{2}\,;\frac{y_E+y_F}{2}\right) = \left(\frac{2+0}{2}\,;\frac{1+7}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\,;\frac{8}{2}\right) = (1\,;4)$$

Les segments $[AB]$ et $[EF]$ ont même milieu.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Le quadrilatère $AEBF$ est un parallélogramme.

b. Déterminons la longueur de côtés consécutifs :

- $AE = \sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2} = \sqrt{[2-(-2)]^2+(1-3)^2} = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

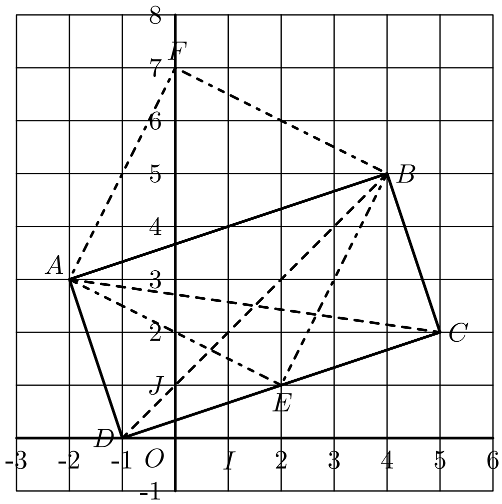
- $EB = \sqrt{(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2}$
  $= \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{2^2+4^2}$
  $= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Les segments $[AE]$ et $[EB]$ ont même longueurs.
Si un parallélogramme a deux de ses côtés consécutifs de même longueur alors ce parallélogramme est un losange.
$AEBF$ est un losange.

c. Déterminons les deux longueurs suivantes :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  $= \sqrt{\big[4-(-2)\big]^2 + (5-3)^2} = \sqrt{6^2+2^2}$
  $= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
- $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$
  $= \sqrt{(0-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{(-2)^2+6^2}$
  $= \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

On a : $AB = EF$
Si un losange a ses diagonales de même longueur alors ce losange est un carré.
$AEBF$ est un carré.




## Correction 3

1. Les coordonnées de ces points sont :
$A\,(0\,;0)$ ; $D\,(1\,;0)$ ; $B\,(0\,;1)$ ; $C\,(1\,;1)$
$I\left(0\,;\frac{3}{4}\right)$ ; $J\left(\frac{3}{4}\,;1\right)$ ; $K\left(1\,;\frac{1}{4}\right)$ ; $L\left(\frac{1}{4}\,;0\right)$

2. Le milieu du segment $[IK]$ a pour coordonnées :
$$\left(\frac{x_I+x_K}{2}\,;\frac{y_I+y_K}{2}\right) = \left(\frac{0+1}{2}\,;\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\,;\frac{\frac{4}{4}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$
Le milieu du segment $[JL]$ a pour coordonnées :
$$\left(\frac{x_J+x_L}{2}\,;\frac{y_J+y_L}{2}\right) = \left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}\,;\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\frac{4}{4}}{2}\,;\frac{\frac{4}{4}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$$
On en déduit que les segments $[IK]$ et $[JL]$ ont même milieu.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

3. Déterminer la longueur des segments $[IK]$ et $[JL]$ :
- $IK = \sqrt{(x_K - x_I)^2 + (y_K - y_I)^2}$
  $= \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1^2+\left(-\frac{2}{4}\right)^2}$
  $= \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $JL = \sqrt{(x_L - x_J)^2 + (y_L - y_J)^2}$
  $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{4}\right)^2+(-1)^2}$
  $= \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$IJKL$ est un parallélogramme et $IK = JL$.
Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors ce parallélogramme est un rectangle.
$IJKL$ est un rectangle.

4. Déterminons les deux longueurs suivantes :
- $IJ = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2}$
  $= \sqrt{\left(\frac{3}{4}-0\right)^2 + \left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}$
  $= \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$
- $IL = \sqrt{(x_L - x_I)^2 + (y_L - y_I)^2}$
  $= \sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2 + \left(0-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}}$
  $= \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$IJKL$ est un rectangle et $IJ = IL$.
Si un rectangle possède deux de ses côtés consécutifs de même longuer alors c'est un carré.
$IJKL$ est un carré.