Devoir surveillé n° 2

Éléments de correction

Exercice 1

Voir formules du cours. Ne pas oublier les coordonnées du sommet pour la représentation graphique.

Exercice 2

1/ $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ 7X^2 + 11X - 6 = 0 \end{cases}$

Après calculs, on obtient les solutions de $7X^2 + 11X - 6 = 0$: -2 et $\dfrac{3}{7}$.

Ainsi : $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X = -2 \text{ ou } X = \dfrac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ ou } \sqrt{x} = \dfrac{3}{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{49}$

On a donc : $S_1 = \left\{ \dfrac{9}{49} \right\}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 5 = (-2x - 1)^2 \\ -2x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 5 = 4x^2 + 4x + 1 \\ -2x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 8x - 4 = 0 \\ -2x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ -2x - 1 \geqslant 0 \end{cases}$

Les solutions de $x^2 + 2x - 1 = 0$ sont $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$. On a donc :

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = -1 - \sqrt{2} \\ -2x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{2}$

On a donc $S_2 = \left\{ -1 - \sqrt{2} \right\}$

2/ $(I) \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x - 2}{-2x + 1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x - 2 - (-2x + 1)}{-2x + 1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x - 3}{-2x + 1} \leqslant 0$

Les racines de $x^2 - 2x - 3$ sont, après calculs, -1 et 3. On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $-2x + 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{-2x + 1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $S = \left[-1 \,;\, \dfrac{1}{2} \right[\cup [3 \,;\, +\infty[$

Exercice 3

1/ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{8}$ donc $\dfrac{1}{2}$ est solution de (E).

2/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c) = ax^3 + \left(b-\dfrac{1}{2}a\right)x^2 + \left(c-\dfrac{1}{2}b\right)x - \dfrac{1}{2}c$.
Ainsi :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^3+3x^2-4x+1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-\frac{1}{2}a=3 \\ c-\frac{1}{2}b=-4 \\ -\frac{1}{2}c=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^3+3x^2-4x+1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+4x-2)$

3/

$(E) \Leftrightarrow x^3+x^2-3x+2 = -x^3-2x^2+x+1 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-4x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+4x-2)=0 \Leftrightarrow x-\dfrac{1}{2}=0$ ou $2x^2+4x-2=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=-1-\sqrt{2}$ ou $x=-1+\sqrt{2}$

Ainsi $S=\left\{\dfrac{1}{2}\ ;\ -1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}\right\}$

Exercice 4

Posons $R(x)=2x^2+px+q$.

$-\dfrac{1}{2}$ et 3 sont les racines de $R \Leftrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}, R(x) = 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-3)$

$\Leftrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}, R(x)=2x^2-5x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} p=-5 \\ q=-3 \end{cases}$

Conclusion : $-\dfrac{1}{2}$ et 3 sont les racines de R pour $p=-5$ et $q=-3$.

Exercice 5

1/ $\Delta = (1-\sqrt{2})^2 - 4(-2\sqrt{2}-4) = 1-2\sqrt{2}+2+8\sqrt{2}+16 = 19+6\sqrt{2}$
De plus $(1+3\sqrt{2})^2 = 1+6\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2 = 1+6\sqrt{2}+18 = 19+6\sqrt{2}$
Conclusion : $\Delta = (1+3\sqrt{2})^2$.

2/ $\Delta > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-(1-\sqrt{2})+(1+3\sqrt{2})}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{2}+1+3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$
$x_2 = \dfrac{-(1-\sqrt{2})-(1+3\sqrt{2})}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$
$S=\{2\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\}$