Devoir surveillé n° 3

Durée : 2 heures

Exercice 1 (2 points)

Question de cours :
On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Soit $a \in I$. Démontrer que $u+v$ est dérivable en a et que $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 3x) + x^2 + 1$$

1/ Factoriser, pour tout réel x, le polynôme $P(x) = 5x^2 + 4x - 9$. En déduire une factorisation, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ de $r(x) = 5x + 4\sqrt{x} - 9$.

2/ a) Démontrer, en utilisant le taux d'accroissement, que f est dérivable en 0.
   b) Justifier que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
   c) Montrer que, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}(5x + 4\sqrt{x} - 9)$$

3/ Dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 (9 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, déterminer l'ensemble sur lequel elle est dérivable puis étudier ses variations (on donnera, le cas échéant, les valeurs approchées des extremums).

1/ f est définie par $f(x) = \dfrac{2x-8}{x^2 - 2x - 3}$

2/ g est définie par $g(x) = \sqrt{-3x^2 - 10x - 3}$

3/ h est définie par $h(x) = 7x^4 + 13x^3 - 27x^2 - 1$

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{1}{3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1/ Calculer la dérivée de f.

2/ Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 sous la forme $y = mx + p$.

3/ Pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T, on pose $d(x) = f(x) - (mx + p)$ où m et p sont les réels trouvés à la question précédente.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 4)$$

   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$$

   c) Déterminer le signe de $d(x)$ et en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et T.