Devoir surveillé n° 6

Durée : 2 heures

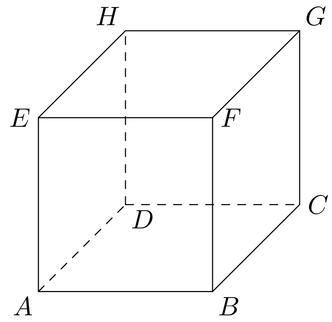
Exercice 1 (3 points)

$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[CD]$ et $[FG]$ et O est le centre de $ABCD$.

1/ Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OF}$.

2/ En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont coplanaires.

3/ Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.



Exercice 2 (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(4;1;1)$, $B(2;-1;2)$, $C(4;-2;4)$, $D(5;3;3)$, $E(6;3;4)$ et $I(-2;3;-4)$.

1/ Démontrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

2/ Démontrer que le plan (ABC) et la droite (DE) sont sécants.

3/ Démontrer que I est le point d'intersection de (ABC) et (DE).

Exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0;2;0)$ et $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

1/ Déterminer une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A passant par B.

2/ Démontrer qu'une équation du cylindre de révolution $\mathscr{C}$ d'axe (Oz) de rayon 1 est :

$$x^2 + y^2 = 1$$

3/ Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{S}$.

Indication : Exprimer y en fonction de z à l'aide des deux équations puis remplacer dans l'équation de $\mathscr{C}$.

Exercice 4 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(4;5;-3)$, $B(9;2;2)$, $C(2;1;-1)$ et $D(-3;4;-6)$.

1/ Démontrer que $ABCD$ est un losange.

2/ Déterminer les coordonnées du centre I de ce losange.

Exercice 5 (3 points)

Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les points I, J, K et L sont définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{7}\overrightarrow{DA}$$

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$.

1/ Déterminer les coordonnées de I, J, K et L.

2/ Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.