Devoir surveillé n° 6

Éléments de correction

Exercice 1

1/ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OF} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OF} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OF}$.

2/ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB}$. De plus les points O, F, H et B sont coplanaires ($BFHD$ est un rectangle) donc les vecteurs $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont coplanaires donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont coplanaires.

3/ $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$. De plus les points B, E, F et J ne sont pas coplanaires (car $B \notin (EFJ)$). AInsi les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 2

1/ $AB^2 = (2-4)^2 + (-1-1)^2 + (2-1)^2 = 9\,;\ AC^2 = \ldots = 18$ et $BC^2 = \ldots = 9$.
$AB = BC$ donc ABC est un triangle isocèle en B.
De plus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc ABC est rectangle en B.

2/ Il faut démontrer, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas coplanaires.
Pour cela, on résout l'équation $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{0}$ d'inconnues a, b et c.

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + c = 0 \\ -2a - 3b = 0 \\ a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ 3b = -2a \\ a - 2a + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas coplanaires donc le plan (ABC) et la droite (DE) sont sécants.

3/ Il faut démontrer que $I \in (ABC)$ et $I \in (DE)$ donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires et que les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 6c = 0 \\ -2a - 3b + 2c = 0 \\ a + 3b - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ 6c - 3b + 2c = 0 \\ -3c + 3b - 5c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ -3b + 8c = 0 \\ 3b - 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3c \\ b = \frac{8}{3}c \end{cases}$$

Une solution est, par exemple, $a = -9$, $b = 8$, $c = 3$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont donc coplanaires.

$\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque donc immédiatemment que $\overrightarrow{DI} = -7\overrightarrow{DE}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont donc colinéaires.
Ainsi $I \in (ABC)$ et $I \in (DE)$. I est donc le point d'intersection de (ABC) et (DE).

Exercice 3

1/ Soit $M(x; y; z)$.

$$M \in \mathscr{S} \Leftrightarrow AM = AB \Leftrightarrow AM^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$$

Une équation de $\mathscr{S}$ est donc $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$.

2/ Soit $M(x;y;z)$ et $M'(0;0;z)$.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MM' = 1 \Leftrightarrow MM'^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $x^2 + y^2 = 1$.

3/ Soit $M(x;y;z)$.

$$M \in \mathscr{C} \cap \mathscr{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - y^2 \\ 1 - y^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - y^2 \\ -4y + 4 + z^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1 + \frac{z^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(1 + \frac{z^2}{4}\right)^2 = 1 \\ y = 1 + \frac{z^2}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16} = 0 \\ y = 1 + \frac{z^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

(Une somme de nombres positifs de peut être nulle que si tous ces nombres sont nuls.)

L'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{S}$ est donc réduite au seul point $I(0;1;0)$.

Exercice 4

1/ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

De plus $AB^2 = 5^2 + (-3)^2 + 5^2 = 59$ et $BC^2 = (2-9)^2 + (1-2)^2 + (-1-2)^2 = 59$ donc $AB = BC$

$ABCD$ est donc un losange.

2/ I est le milieu de $[AC]$ donc $I\left(\dfrac{4+2}{2};\dfrac{5+1}{2};\dfrac{-3-1}{2}\right)$ donc $I(3;3;-2)$

Exercice 5

1/ $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $I(\frac{1}{2};0;0)$.

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $J(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0)$.

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $K(0;\frac{1}{4};\frac{3}{4})$.

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{DA} = \dfrac{6}{7}\overrightarrow{AD}$ donc $L(0;0;\frac{6}{7})$

2/ On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$

$$a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK} + c\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b = 0 \\ \frac{3}{4}b + \frac{6}{7}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8}b \\ c = -\frac{7}{8}b \\ \frac{1}{6} \times \frac{3}{8}b - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \times \frac{7}{8}b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8}b \\ c = -\frac{7}{8}b \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{8}b \\ c = -\frac{7}{8}b \end{cases}$$

Une solution est, par exemple, $a = -3$, $b = 8$, $c = -7$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont donc coplanaires.

Les points I, J, K et L sont donc coplanaires.